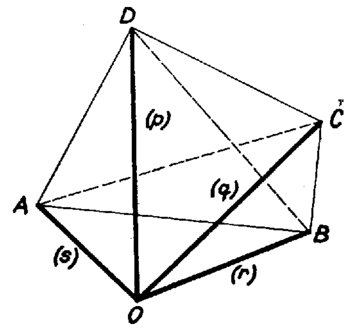
I. megoldás. Legyen az adott szakaszok közös kezdőpontja O, végpontjaik egy bizonyos helyzetben A, B, C, D, a betűzést úgy választva, hogy $ABCD$ ne hurkolt négyszöget adjon.



2. ábra

Ennek területe, mint ismeretes (2. ábra)

$$t = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \varphi, \tag{2}$$

ahol φ az AC és AD átlók által bezárt szög.

A szakaszok kölcsönös helyzetét változtatva mindig fennáll

$$AC \leq AO + OC, \qquad BD \leq BO + OD, \qquad (0 \leq) \sin \varphi \leq 1,$$

tehát

$$t \leq \frac{1}{2}(AO + OC)(BO + OD).$$

Itt az egyenlőség teljesül, (2) tényezői (egymástól függetlenül) elérik legnagyobb értéküket, ha az OA és OC, valamint OB és OD szakaszok egymás meghosszabbításába esnek – más szóval, ha O az AC és BD átlók metszéspontjává válik –, és ha még $\varphi = 90^\circ$, vagyis az átlók merőlegesek egymásra. Ekkor t legnagyobb értéke csak a szakaszok hosszától és azok két párba rendezésétől függ.

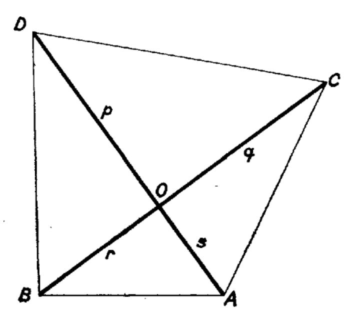
A 4 szakasz 2 párba állítása háromféleképpen lehetséges, mert az elsőnek kiválasztott szakasz meghosszabbításába a további 3 bármelyikét állíthatjuk, és ezután mindig a maradó 2 szakasz alkotja a másik párt. Legyen a 4 szakasz hossza p, q, r, s úgy, hogy $p \geq q \geq r \geq s (> 0)$, így a kétszeres terület legnagyobb értéke a következő 3 szorzat valamelyike:

$$2t_1 = (p+q)(r+s), \qquad 2t_2 = (p+r)(q+s), \qquad 2t_3 = (p+s)(q+r).$$

A harmadikból az elsőt, majd a másodikat kivonva a különbség így alakítható:

$$2(t_3 - t_1) = (p-r)(q-s), \qquad 2(t_3 - t_2) = (p-q)(r-s).$$

Ezek egyike sem negatív, tehát $t_3 \geq t_1$, $t_3 \geq t_2$, így p-nek s-sel – vagyis a leghosszabb szakasznak a legrövidebbel – egy átlóba állítása esetén kapunk legnagyobb területű négyszöget (3. ábra).



3. ábra

II. megoldás. A fentebbi jelölésekkel az OAB, OBC, OCD és ODA háromszög területe külön-külön akkor a legnagyobb, ha O-ból kiinduló két oldaluk merőleges egymásra. Ez a 4 feltétel egyidejűen teljesíthető úgy, hogy a négy háromszög O-nál levő derékszögeivel kitöltjük az O pont körüli 360°-os szögtartományt, és ekkor az $ABCD$ négyszög területe is a legnagyobb, egyenlő a négy derékszögű háromszög területének összegével. Ebben az elhelyezésben 2–2 szakasz egymás meghosszabbításába esik, és az $ABCD$ négyszög egy-egy átlóját alkotja.

A szakaszok fenti 3 párosításából akkor kapunk legnagyobb területet, ha az egyik átló a legkisebb és a legnagyobb szakasz összege. Ismeretes ugyanis, hagy két egyenlő kerületű téglalap közül annak nagyobb a területe, amelyikben az oldalak különbsége (abszolút értékben) kisebb. Más szóval, ha két (két-tényezős) szorzatban a tényezők összege ugyanakkora, akkor az a szorzat nagyobb, amelyikben a tényezők kevesebbel térnek el egymástól. Esetünkben a két tényező a 4 adott szakaszból alkotott két páros összeg, és ezek eltérése akkor a legkisebb, ha a legkisebb szakaszt a legnagyobbikkal állítjuk párba.