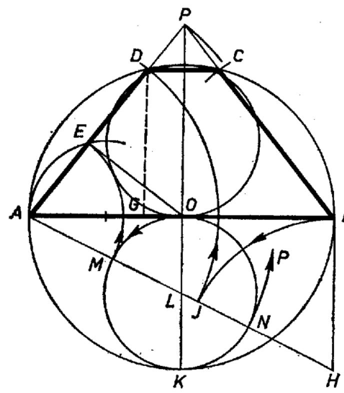
Megoldás. A megszerkesztendő $ABCD$ trapéz egyenlő szárú, mert húrtrapéz, és szárai a hosszabb párhuzamos oldal szemben levő végpontjából mindenesetre hegyes szögben látszanak, így kisebbek a kör átmérőjénél. A trapéznak a kör átmérőjével egyenlő AB oldala tehát a hosszabb párhuzamos oldal.



1. ábra

A szár hosszát számítással határozzuk meg. Legyen $AB = 1$, $AD = BC = x$, D vetülete az AB oldalon G (1. ábra). Az ABD háromszög Thalész tétele alapján derékszögű, így az ismert mértani középarányos tétel szerint $AD^2 = AB \cdot AG$, azaz $AG = x^2$. Ezért $DC = AB - 2AG = 1 - 2x^2$. Mivel továbbá a trapézba kör írható, azért $AD + BC = AB + DC$, vagyis

$$2x = 1 + (1 - 2x^2), \tag{1}$$

aminek pozitív gyöke

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Ennek alapján a szerkesztés a következő. Az adott kör O középpontján át tetszés szerint felvett AB átmérő B végpontjában meghúzzuk az érintőt, felmérjük rá a $BH = BO = 1/2$ szakaszt, ekkor $AH = \sqrt{5}/2$. Az AH szakaszt metszük a H körül HB sugárral írt körrel J-ben, ekkor $AJ = x$. Végül az A és B körül AJ sugárral írt körívvel az adott körből kimetsszük a D, illetőleg C csúcsot.

Így a csúcsok a körön vannak, másrészt teljesül (1) is, ezért a trapézba érintő kör írható, tehát megfelel a követelményeknek.

Megjegyzés. A fenti szerkesztést felére kicsinyítve végezhetjük el, a kör AB-re merőleges sugarai egyike, OK fölé kört írva. Ennek középpontját L-lel, AL-lel való metszéspontjait M-mel és N-nel jelölve ($AM < AN$) $AM = AJ/2$, ennek alapján az AO átmérőjü Thalész körből kimetszhetjük az AD oldal E felezőpontját.

Az N metszéspont alapján viszont a szárak P metszéspontját jelölhetjük ki a trapéz szimmetriatengelyén. Ugyanis OE, mint az OAD egyenlő szárú háromszög magassága, merőleges AP-re, így a PAO derékszögű háromszögből

$$AP = \frac{AO^2}{AE} = \frac{1}{4 \cdot AE} = \frac{1}{4 \cdot AM} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} = AL + LN = AN.$$