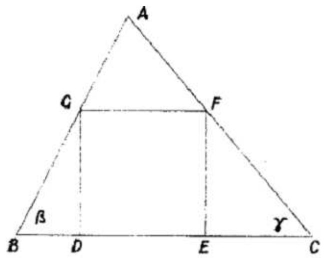
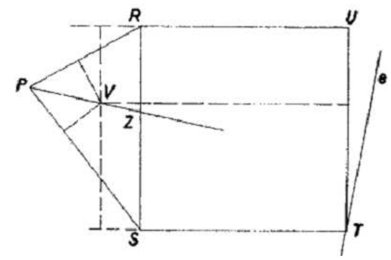
I. megoldás. Az ABC háromszögbe írt négyzet D és E csúcsa legyen a BC egyenesen, F és G pedig a CA, illetőleg AB egyenesen. Megmutatjuk, hogy a beírt kör középpontja nem lehet az AFG, BDG, CEF háromszögek egyikében sem. Mivel a középpont a belső szögfelezők metszéspontja, állításunk könnyen adódik a következő segédtételből.



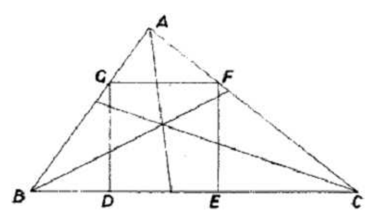


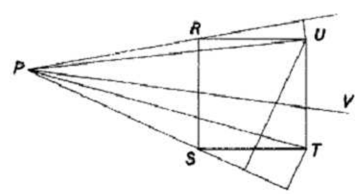
Ha egy PRS háromszög R-nél és S-nél levő szöge nem tompaszög, és az RS oldalra, annak ellenkező oldalán, mint amelyiken a háromszög van, $RSTU$ négyzetet rajzolunk, továbbá a T csúcson át egy e egyenest húzunk, amelyik nem metszi a négyzetet, akkor az RPS szög felezőjének a háromszögbe eső minden V pontja messzebb van e-től, mint a PR, PS egyenesektől. A $PRUTS$ ötszög a háromszög szögeire tett feltevés folytán konvex, így az egyenes teljesen rajta kívül fekszik, tehát V-t e bármely pontjával összekötő szakasz metszi az ötszög kerületét, tehát hosszabb valamelyik ötszögoldaltól való távolságnál. Ezek között viszont a PR, PS oldalaktól való (egyenlő) távolság a legkisebb, mert az RU, ST oldalakra bocsátott merőleges metszi PR-t, illetőleg PS-t, tehát hosszabb a megfelelő oldaltól való távolságnál, a TU oldaltól való távolság viszont nagyobb a négyzetoldalnál, míg a PR, PS-től való távolság nem nagyobb, mint a szögfelező és az RS oldal Z metszéspontjának távolsága ezektől az egyenesektől, az pedig nem nagyobb a ZR, ZS kisebbikénél, s így nem nagyobb a négyzetoldal felénél.

Segédtételünk alkalmazható az AFG, BDG, CEF háromszögekre, ha az $ABC\sphericalangle=\beta$ és $ACB\sphericalangle=\gamma$ nem tompaszög, mert ekkor az AFG háromszög F-nél és G-nél levő szöge γ, illetőleg β, tehát nem tompaszög. A BDG és CEF háromszög, ha nem válik egyenesszakasszá, akkor derékszögű, és a közös oldalnak ellenkező oldalán van, mint a négyzet. Így a beírt kör középpontja nem lehet a szögfelezőknek a négyzeten kívüli részében, tehát a négyzetbe kell hogy essék.

Megjegyzés. Csak a négyzetoldalak melletti szögekről használtuk ki hegyesszög voltukat, így ha a beírt négyzet két csúcsa a legnagyobb oldalon van, az állítás minden háromszögre érvényes. Az állítás érvényessége a további megoldások bizonyításaiból is adódik, a III. megoldás esetében a megjegyzésbeli kiegészítéssel.

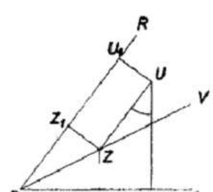
II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva azt mutatjuk meg, hogy mindegyik szögfelező a négyzet két szemközti oldalát metszi. Ebből következik, hogy a B-ből, illetőleg C-ből húzott szögfelező a CF, illetőleg BG szakaszon metszi a szemközti oldalt, így mindkettőnek a háromszögbe eső szakasza benne van a $BCFG$ trapézban, a harmadik szögfelezőnek a háromszögbe eső szakaszát viszont az $AGDEF$ ötszög tartalmazza, így metszéspontjuk a mindkét idom által fedett síkrészben, tehát a $DEFG$ négyzetben van.

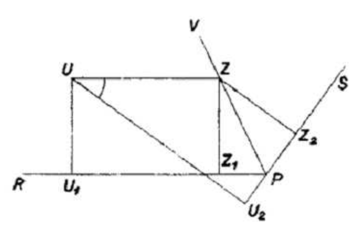




A három háromszög esetét ismét együtt tárgyalhatjuk. A PRS háromszög R-nél és S-nél levő szöge ne legyen tompaszög, rajzoljunk az RS oldalra, annak ellenkező oldalán, mint amelyiken a háromszög van, $RSTU$ négyzetet, és az RPS szög felezőjének egy pontja legyen V. A feltételekből következik, hogy U és T az RPS szögtartományban van.

A szögfelező pontjai egyenlő távol vannak a PR és PS egyenestől, az RPV szögtartomány pontjai az RP szárhoz, az SPV tartományéi az SP szárhoz vannak közelebb. Az U pont távolsága a PR egyenestől kisebb UR-nél, tehát a négyzet oldalánál. Másrészt U az RST szögtartományban van, tehát a belőle PS-re bocsátott merőleges metszi az RS vagy ST egyenest, s így már a négyzetbe eső szakasza legalább akkora, mint UR vagy UT, tehát mint a négyzet oldala. Így U az RPV szögtartományban van, és ugyanígy látható, hogy T az SPV szögtartományban van. Így a szögfelező az UPT szögtartományban van, tehát metszi az UT szakaszt, másrészt az RS szakaszt is, tehát a négyzet két átellenes oldalát. Ezt akartuk bizonyítani.

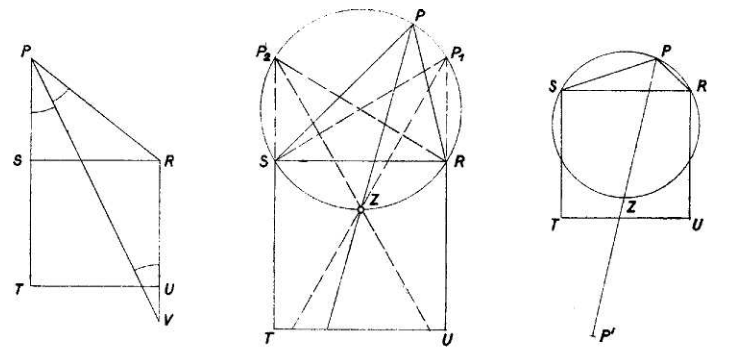




Megjegyzés. Felhasználtuk azt, hogy az RPV szögtartományban levő U pont közelebb van RP-hez, mint SP-hez. Ezt így láthatjuk be: Legyen U vetülete a PR, illetőleg PS egyenesen U_1, illetőleg U_2, az U-n át PR-rel párhuzamos egyenes metszéspontja a szögfelezővel Z, és ennek vetülete PR-en és PS-en Z_1 és Z_2. Ekkor egyrészt az U_1UZZ_1 téglalapból, és mert Z a szögfelezőn van, $UU_1 = ZZ_1 = ZZ_2$. Másrészt az $U_2UZ\sphericalangle$ hegyesszög (vagy 0°), mert vagy U_2U fut a derékszögű U_1UZ szögtartományban (ha $RPS\sphericalangle > 90^\circ$), vagy az U_1UU_2 szögtartomány tartalmazza UZ-t. Így az U_2UZZ_2 derékszögű trapézban (ami egyenesszakasszá is lapulhat) $UU_2 > ZZ_2 = ZZ_1 = UU_1$, és ezt akartuk bizonyítani.

III. megoldás. Hegyesszögű háromszögre bizonyítjuk az állítást a feladat szövegének megfelelően, az előző megoldás segédtételére adva új bizonyítást, ha RPS szög hegyesszög.

Először azt az esetet vizsgáljuk, ha a háromszög S-nél derékszögű. Messe a P-ből húzott szögfelező az RU egyenest V-ben. A PRV háromszög egyenlő szárú, mert $RVP\sphericalangle = VPS\sphericalangle = VPR\sphericalangle$. Így $VR = PR > RS = RU$, vagyis V az RU oldal U-n túli meghosszabbításán van. A PV szakasz tehát az egymással szemben levő SR és TU oldalakat metszi.

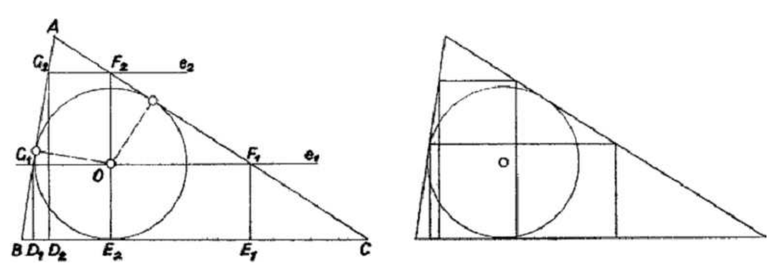


Ha R-nél és S-nél hegyesszög van a PRS háromszögben, akkor rajzoljuk meg a háromszög köré írt kört. A P-ből húzott szögfelező ezt a P-t nem tartalmazó SR ív Z felezőpontjában metszi. Messe UR és TS meghosszabbítása a kört másodszor P_1-ben, illetőleg P_2-ben. Mivel a háromszög hegyesszögű, P a rövidebb P_1P_2 íven van. Az $SP_1R\sphericalangle$ és $SP_2R\sphericalangle$ felező egyenese is átmegy Z-n, és az előbbi szerint közrefogja a PZ szögfelezőt. Az első két szögfelező a föntebb tárgyalt speciális esetből adódóan a TU szakaszt metszi, tehát a köztük levő PZ szögfelező is, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Ha $SPR\sphericalangle \geq 90^\circ$, akkor pl. abból adódik a segédtétel helyessége, hogy Z nincs messzebb TU-tól, mint RS-től, s így P rá vonatkozó P' tükörképe a TU ellenkező oldalán van, mint P, és azzal együtt az RU és ST egyenesek közt fekszik.

IV. megoldás. Mozgassunk egy BC-vel párhuzamos e egyenest a BC oldaltól A felé, és bocsássunk az AB és AC oldallal való G és F metszéspontból minden helyzetben merőlegest BC-re. A keletkező beírt téglalap FG oldala a rá merőleges oldal növekedésével állandóan csökken.

Amig e elválasztja a beírt kör O középpontját és a BC oldalt, addig a téglalap magassága legfeljebb a beírt kör ϱ sugarát érheti el, viszont alapja nem kisebb az O-n átmenő egyenes háromszögbe eső szakaszánál, ami nagyobb 2ϱ-nál. A beírt négyzet tehát ezek közt a téglalapok közt nem szerepel.



Tovább mozgatva e-t, a téglalapok mindaddig tartalmazzák O-t, míg az az egyik BC-re merőleges oldalra nem kerül. Tartozzék ehhez a helyzethez a $D_2E_2F_2G_2$ téglalap, és essék O pl. az E_2F_2 oldalra. Ekkor $E_2F_2 > 2\varrho$, viszont $G_2F_2 \leq \varrho$, ugyanis az AB és AC oldalak érintkezési pontja a körrel az AG_2, ill. AF_2 szakaszok meghosszabbításán van (hiszen közelebb van BC-hez, mint 2ϱ), a G_2D_2 egyenes pedig a BAC szögtartományban halad, ha ABC szög és ACB szög nem tompa, így van közös pontja a körrel, tehát annak E_2F_2-re merőleges sugarával is. Így ez a téglalap sem négyzet, sem azok, amelyek e-nek A felé történő továbbmozgatásával keletkeznek.

Az ABC háromszögbe beírt, BC oldalon nyugvó négyzetnek ezek szerint az O-t belsejükben tartalmazó téglalapok közt kell lennie.

Megjegyzés. A többi megoldásból is kiolvasható, amit itt kimondtunk, hogy a négyzet a kör középpontját belsejében tartalmazza.

Az utolsó megoldás azt is adja, hogy a háromszögbe beírt fél-négyzetek – akár a BC-n nyugvó oldal fele a másiknak, akár a rá merőleges oldal – szintén belsejükben tartalmazzák a beírt kör középpontját. Ez könnyen leolvasható az első megoldásból is.