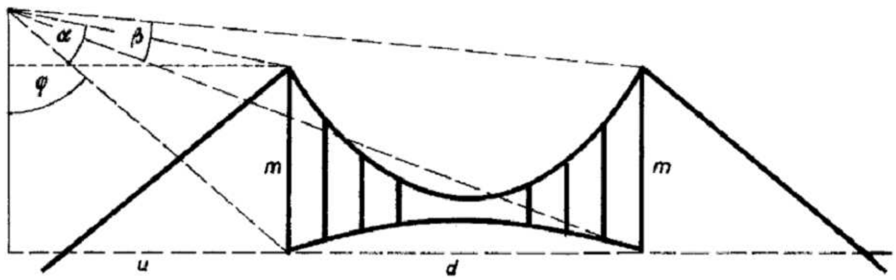


I. megoldás. Legyen a keresett magasság[1] h, a megfigyelő szemének merőleges vetülete a feladatban szereplő síkon legyen u távolságra a budai kapuzattól – jelöljük ennek látószögét α-val – és az ennek alsó végpontjához vezető látósugár zárjon be φ szöget a függőleges iránnyal. Ekkor

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u}{h}$$
$$\operatorname{tg}(\varphi+\alpha) = \frac{u}{h-m} = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha} = \frac{u/h+\operatorname{tg}\alpha}{1-(u\operatorname{tg}\alpha)/h} = \frac{u+h\operatorname{tg}\alpha}{h-u\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ebből u-ra és h-ra a következő egyenlet adódik:

$$uh - u^2\operatorname{tg}\alpha = uh + h^2\operatorname{tg}\alpha - um - hm\operatorname{tg}\alpha,$$

vagy rendezve és cotg α-val szorozva

$$u^2 + h^2 - u\,m\,\operatorname{cotg}\,\alpha - h\,m = 0.$$

A pesti kapuzatra vonatkozóan ugyanilyen egyenlet adódik, csak α és u helyébe β és $u+d$ lép:

$$(u+d)^2 + h^2 - (u+d)\,m\,\operatorname{cotg}\,\beta - h\,m = 0.$$

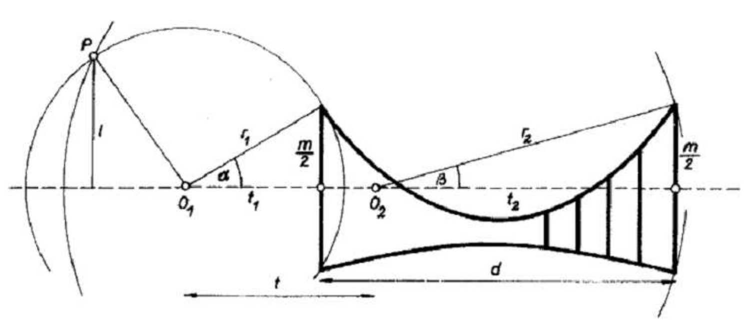
A két egyenlet különbségét képezve meghatározható u és ezt ismerve az első egyenletből a keresett h magasság, mint az egyenlet pozitív gyöke:

$$(u+d)^2 - u^2 - \big[u\,(\operatorname{cotg}\,\beta - \operatorname{cotg}\,\alpha) + d\,\operatorname{cotg}\,\beta\big]\,m =$$
$$= u\big[2d - m\,(\operatorname{cotg}\,\beta - \operatorname{cotg}\,\alpha)\big] - d\,(m\,\operatorname{cotg}\,\beta - d) = 0,$$
$$u = \frac{d\,(m\,\operatorname{cotg}\,\beta - d)}{2d - m\,(\operatorname{cotg}\,\beta - \operatorname{cotg}\,\alpha)},$$
$$h = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + u\,m\,\operatorname{cotg}\,\alpha - u^2}.$$

Adataink közül csak a nagyobbik szög lehet a budai és a kisebb a pesti kapuzat látószöge, mert megcserélve a szögeket $m\cdot\operatorname{cotg}\,11{,}4^\circ < 40\cdot 5 = 200$ folytán u-ra negatív értéket kapnánk. A számításokat 4 jegyű függvénytáblázattal végezve

$$m\,\operatorname{cotg}\,\beta = 196{,}4, \qquad m\,(\operatorname{cotg}\,\beta - \operatorname{cotg}\,\alpha) = 288,$$
$$2d - m\,(\operatorname{cotg}\,\beta - \operatorname{cotg}\,\alpha) = 292,$$
$$\lg u = 2{,}2902, \quad u\,m\,\operatorname{cotg}\,\alpha = 38\,700,$$
$$(m/2)^2 = 400, \quad u^2 = 38\,050,$$
$$h = 20 + \sqrt{1050} = 52{,}4 \approx 52\text{ m}.$$

(Mivel az adatok egy része csak 2 értékes jegyig ismert, az eredménynek is legfeljebb két jegye elfogadható.)



[1] Az ábrán h bejegyzése pótlandó.

II. megoldás. A megfigyelő P nézőpontja egyrészt rajta van azon a látószögköríven; amelyről a közelebbi kapuzat α szög alatt látszik, másrészt azon is, amelyikről a távolabbi β szög alatt látszik. Legyen a körök középpontja O_1, O_2, távolságuk a megfelelő kapuzattól t_1, ill. t_2, sugaruk r_1, ill r_2, P távolsága az O_1O_2 egyenestől l; ekkor a keresett magasság $m/2+l$. l-et mint az O_1O_2P háromszög magasságát határozzuk meg. Az oldalak kiszámíthatók: $O_1P=r_1$, $O_2P=r_2$, és $O_1O_2=t_1+d-t_2$; jelöljük az utóbbit t-vel. A középponti és kerületi szögek közti összefüggésből adódik, hogy r_1, t_1 és $m/2$ egy α hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög oldalai, r_2, t_2 és $m/2$ pedig egy β hegyesszöget tartalmazóé, így

$$r_1=\frac{m}{2\sin\alpha},\qquad r_2=\frac{m}{2\sin\beta},$$
$$t_1=\frac{m}{2}\operatorname{cotg}\alpha,\qquad t_2=\frac{m}{2}\operatorname{cotg}\beta,\quad t=d+t_1-t_2.$$

Mostmár a háromszög területét egyrészt az l magasság felhasználásával, másrészt Heron képletével kiszámítva és l-et kifejezve – ha $(r_1+r_2+t)/2$-t s-sel jelöljük –

$$l=\frac{2\sqrt{s(s-r_1)(s-r_2)(s-t)}}{t}.$$

4 jegyű függvénytáblázatot használva $r_1=101{,}2$, $r_2=244{,}1$, $t=146$, $l=31{,}5$ adódik, így $h=51{,}5\approx 52$ m.

Megjegyzés. Adataink mellett $s-r_2=1{,}5$ adódik, tehát a számított 4-jegyű értékek utolsó két jegye játszik lényeges szerepet. Ebből érthető az eredmény pontatlansága, a két megoldásban kapott értékek eltérése.