A megoldások során a következő jelöléseket fogjuk használni: A járművek sebességét – mint az ilyen feladatoknál ez szokásos – állandónak tételezve fel, legyen a tehergépkocsi sebessége v, a személygépkocsi sebessége V, A és B távolsága s, a hazaérkezés közös időpontja x.

I. megoldás. Az első találkozásig a tehergépkocsi vt_2, a személygépkocsi $V(t_2-t_1)$ utat tesz meg, és ez együtt a teljes úthossz

$$s=vt_2+V(t_2-t_1).$$

A tehergépkocsi menetideje t_1-r órával több, mint a személygépkocsié, mert az utóbbi A-ból t_1 órával később indult, és B-be r órával később érkezett, mint a tehergépkocsi, azaz

$$\frac{s}{v}=\frac{s}{V}+t_1-r.$$

E két egyenletből az s utat kiküszöbölve

$$t_2+\frac{V}{v}(t_2-t_1)=\frac{v}{V}t_2+t_2-r, \tag{1}$$

és ezt a v/V hányadosra, mint ismeretlenre rendezve a

$$t_2\left(\frac{v}{V}\right)^2-r\left(\frac{v}{V}\right)-(t_2-t_1)=0$$

egyenlethez jutunk, amelynek pozitív gyöke

$$\frac{v}{V}=\frac{1}{2t_2}\left(r+\sqrt{r^2+4t_2(t_2-t_1)}\right).$$

$t_2>t_1(\geq 0)$ esetén a gyök mindig valós. A negatív gyöknek nem tulajdonítunk értelmet.

A második találkozás után mind a két gépkocsi még $x-t_3$ ideig volt úton, és ezalatt együttesen ismét befutották az s utat, azaz

$$v(x-t_3)+V(x-t_3)=s=vt_2+V(t_2-t_1),$$

amiből $V+v$-vel való osztás és rendezés után

$$x=t_3+t_2-\frac{1}{\frac{v}{V}+1}\cdot t_1$$

A numerikus adatokkal

$$\frac{v}{V}=\frac{2}{3}\quad \text{és}\quad x=16\frac{2}{5}\ \text{óra},$$

azaz a két gépkocsi 16 óra 24 perckor ért haza.

Megjegyzések. 1. Közvetlenül az (1) egyenlet egy kissé átrendezett alakjához vezet a következő meggondolás. Az első találkozásig a tehergépkocsi vt_2, a személygépkocsi $V\ (t_2-t_1)$ utat tett meg, és ekkor mindegyik előtt annyi út állt, mint amennyit a másik már megtett. A tehergépkocsi a hátralevő útját $\frac{V\,(t_2-t_1)}{v}$ idő, a személygépkocsi $\frac{vt_2}{V}$ idő alatt teszi meg, de ez utóbbi r órával később ér célba, ezért

$$\frac{V(t_2-t_1)}{v}+r=\frac{vt_2}{V}.$$

2. Hasonló gondolatmenettel x is meghatározható. A visszaindulástól a második találkozásig a tehergépkocsi a személygépkocsi előtt álló $V(x-t_3)$ utat tette meg. Ehhez $\frac{V(x-t_3)}{v}$ időre volt szüksége. Hasonlóan a személygépkocsi a találkozás előtt $\frac{v(x-t_3)}{V}$ idővel indult vissza. Ennek a két időnek a különbsége egyben az egész út megtételéhez szükséges idők különbsége is. Az odamenetre vonatkozó adatok szerint ez az időkülönbség t_1-r, azaz

$$\frac{V(x-t_3)}{v}-\frac{v(x-t_3)}{V}=t_1-r,$$

amiből x a v/V hányados ismeretében kiszámítható.

II. megoldás. Legyen az első találkozás helye C. A személygépkocsi és a tehergépkocsi menetidőinek aránya az AB úton ugyanaz, mint az AC úton. Legyenek a menetidők az AB úton T, illetőleg t, így

$$T:t=(t_2-t_1):(t-t_2)$$

Másrészt láttuk, hogy

$$t - T = t_1 - r.$$

T kiküszöbölésével

$$t^2 - (2\,t_2 - r)\,t + t_2\,(t_1 - r) = 0,$$

ahonnan a nagyobbik gyök

$$t = t_2 + \frac{1}{2}\big(- r + \sqrt{r^2 + 4t_2(t_2 - t_1)}\big)$$

(ugyanis nyilvánvalóan $t > t_2$, a másik gyök nem adhatja a feladat megoldását).

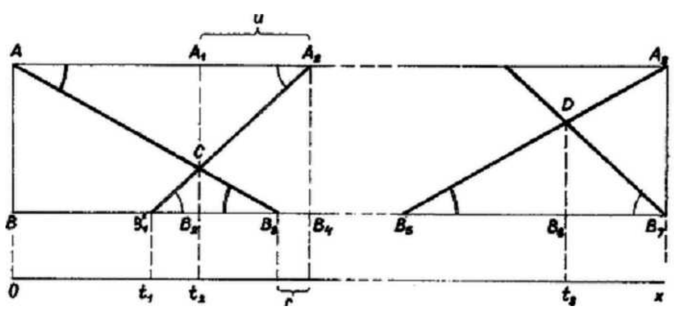
Most már kiszámíthatjuk a második találkozástól a hazaérkezésig eltelt $x - t_3$ időt. Ennyi idő alatt a teherautó az egész út $(x - t_3)/t$ részét, a személyautó az $(x - t_3)/T$ részét teszi meg, a kettő együtt az egész utat – az út 1-szeresét – adja, azaz

$$\frac{x - t_3}{t} + \frac{x - t_3}{T} = 1,$$

$$x = t_3 + \frac{1}{\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{T}} = t_3 + \frac{t}{1 + \dfrac{t - t_2}{t_2 - t_1}} = t_3 + \frac{t(t_2 - t_1)}{t - t_1}.$$

A numerikus adatokkal $t = 6$, $x = 16{,}4$ adódik.

III. megoldás. Megoldhatjuk a feladatot a mozgások idő–út grafikonjának vázlatára támaszkodó számítással is.



1. ábra

Mindegyik autó oda vissza útját (külön-külön) egyenlő hajlású szakaszok ábrázolják, ezért végpontjaik, valamint a találkozásokat jelentő pontok közül alkalmasan választott ponthármasok hasonló háromszögeket határoznak meg, és ezek alapjából a találkozási pontok vetületei arányos részeket vágnak le. Az 1. ábra jelöléseivel

$$\frac{B_1B_2}{B_1B_3} = \frac{A_2A_1}{A_2A} = \frac{B_7B_6}{B_7B_5} = \frac{B_7B_6}{BB_3}.$$

1. ábra

1. ábra

Legyen $A_1A_2 = u$ az az idő, amennyivel az első találkozás után a személyautó A-ba érkezik. Ezt mint az első két hányados egyenlőségéből adódó másodfokú egyenlet pozitív gyökét kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\frac{t_2 - t_1}{t_2 + u - r - t_1} = \frac{u}{t_2 + u},\\
&u^2 - ru - t_2\,(t_2 - t_1) = 0,\\
&u - \frac{1}{2}\big(r + \sqrt{r^2 + 4t_2\,(t_2 - t_1)}\big).
\end{aligned}$$

Ennek alapján a keresett időpont a negyedik és a második hányados egyenlőségéből adódik:

$$\frac{x - t_3}{t_2 + u - r} = \frac{u}{t_2 + u},$$

$$x = t_3 + u\frac{t_2 + u - r}{t_2 + u} = t_3 + u\left(1 - \frac{r}{t_2 + u}\right).$$

Numerikusan $u = 8/3$ óra, és $x = 16{,}4$ óra.