Adjuk hozzá az első egyenlethez a második egyenlet 3-szorosát, így a bal oldal $(x+y)^3$ lesz. Ebből köbgyökvonással

$$x+y=\sqrt[3]{a+3b}, \tag{1}$$

majd ezt a második egyenletbe helyettesítve osztással

$$xy=\frac{b}{\sqrt[3]{a+3b}},$$

hacsak $a+3b\neq 0$. Szorítkozzunk egyelőre erre az esetre. Feltételünk mellett $x+y$ és xy mindig léteznek és egyértelműen meghatározott értékek, mert a köbgyökvonás a valós számok körében mindig elvégezhető és egyértelmű. Legyen

$$\sqrt[3]{a+3b}=B \quad \text{és} \quad b/B=C,$$

ekkor x és y a következő egyenlet két gyöke:

$$z^2-Bz+C=0,$$

vagyis

$$\frac{1}{2}\left(B+\sqrt{B^2-4C}\right) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\left(B-\sqrt{B^2-4C}\right),$$

bármelyik sorrendben véve. A diszkriminánst a-val és b-vel kifejezve

$$B^2-4C=\frac{1}{B}\left(B^3-4BC\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}(a+3b-4b)=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}},$$

így a gyökök

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}\right) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+3b}-\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}\right) \tag{2}$$

x és y akkor valósak, ha a négyzetgyök alatt pozitív szám vagy nulla áll. A négyzetgyök alatti tört értéke akkor pozitív, ha számlálója és nevezője egyszerre pozitív vagy negatív, tehát ha

$$a-b>0 \quad \text{és} \quad a+3\,b>0 \qquad \text{vagy} \qquad a-b<0 \quad \text{és} \quad a+3\,b<0.$$

Az első esetben, ha $b>0$, akkor $a+3\,b=a-b+4\,b>a-b$, tehát elég feltenni, hogy $a-b>0$; ha pedig $b\leq 0$, akkor $a-b=a+3b-4b\geq a+3b$, és így elég az utóbbi kifejezésről megkövetelni, hogy pozitív legyen. Hasonló meggondolásokat alkalmazva a második esetben is, azt nyerjük, hogy x-re és y-ra két különböző valós érték adódik (és mint már mondtuk, szerepük felcserélhető), ha

$$\begin{aligned}
&\text{I. } a-b>0 \quad \text{és} \quad b>0, \quad \text{vagy}\\
&\text{II. } a+3b>0 \quad \text{és} \quad b\leq 0, \quad \text{vagy}\\
&\text{III. } a+3b<0 \quad \text{és} \quad b\geq 0, \quad \text{vagy}\\
&\text{IV. } a-b<0 \quad \text{és} \quad b<0.
\end{aligned}$$

A négyzetgyök értéke nulla, ha $a=b$ (és $\neq 0$, különben $a+3\,b=0$ lenne), ekkor egy megoldás van:

$$x=y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+3b}.$$

Ha végül $a+3\,b=0$, akkor $x+y=0$, és ez a második egyenlettel csak úgy fér össze, ha $b=0$; ekkor $a=-3\,b=0$ is fennáll. Ekkor minden x-re $y=-x$ választással megoldását kapjuk az egyenletrendszernek. – Ha viszont $a+3\,b=0$ és $b\neq 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Megjegyzések. 1. Ha (2)-ben a számlálóból és nevezőből külön-külön vonunk négyzetgyököt, elveszíthetjük a III. és IV. eseteket.

2. Az $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ azonosság felhasználásával és a két egyenlet elosztásával $(x,y,x+y\neq 0)$ az

$$\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{a}{b}$$

egyenlethez, majd $x/y=u$ helyettesítéssel rendezés után az

$$u^2-(1+a/b)\,u+1=0$$

másodfokú egyenlethez juthatunk. u-t kiszámítva az egyik gyök a másikkal kifejezhető. E kifejezést pl. (1)-be helyettesítve a gyökök maguk is kiszámíthatók, de a fentieknél lényegesen bonyolultabb alakban adódnak.