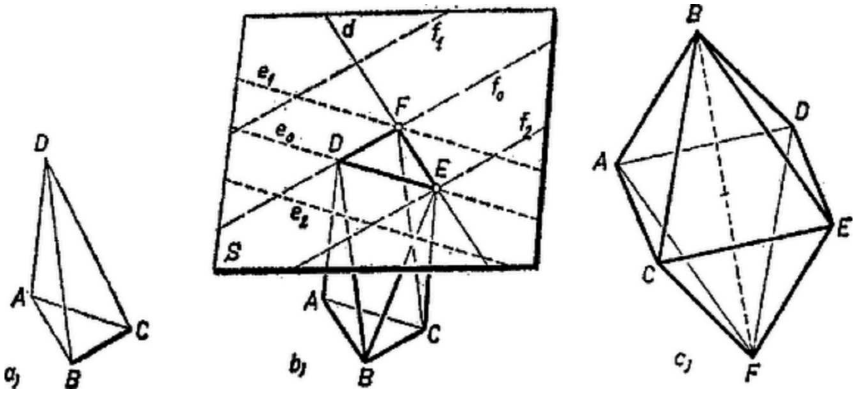
I. megoldás. 1. Keressük először az olyan poliédereket, amelyeknek minden határlapja háromszög. Legyen a poliéder egy AB élén átmenő két határlap ABC és ABD. Az $ABCD$ háromoldalú gúla tekinthető a feladat követelményeit kielégítő poliédernek (nem választható ki több különböző csúcsnégyes, 2. *a.* ábra).



2. ábra

Ha a poliédernek négynél több csúcsa van, akkor minden további csúcsnak a D-n átmenő, ABC-vel párhuzamos S síkban kell lennie, mert az ABC síkban több csúcs nincs, a többi csúcs ennek a síknak ugyanazon oldalán van, mint D, és a síktól ugyanakkora távolságra, mint D, mert különben az A, B, C csúcsokkal $ABCD$-étől különböző térfogatú gúlát alkotna. Ugyanígy benne vannak a további csúcsok a C-n átmenő, ABD-vel párhuzamos síkban is, tehát a két sík d metszésvonalán kell lenniük (2. *b.* ábra).

A további csúcsok ezenkívül az A, C, D csúcsokkal is akkora térfogatú gúlát alkotnak, mint $ABCD$, vagy az ACD síkban vannak. Az előbbi esetben viszont annak a két az ACD síkkal párhuzamos síknak egyikében vannak, amelyek olyan távolságra vannak az ACD síktól, mint a B csúcs. Ezek a síkok S-t egy a D-n átmenő e_0 és a két oldalán egy-egy vele párhuzamos e_1 és e_2 egyenesben metszik. Ezek párhuzamosak AC-vel, d-ből két az AB-vel egyenlő szakaszt metszenek ki. Tekintetbe véve még azt is, hogy a további csúcsok BCD-vel is akkora térfogatú gúlát alkotnak, mint $ABCD$, vagy a BCD síkban vannak, S-ben egy D-n átmenő, BC-vel párhuzamos f_0 egyenest és a két oldalán egy-egy vele párhuzamos f_1 és f_2 egyenest kapunk, amelyek távolsága f_0-tól akkora, mint az A csúcsé BC-től.

A d egyenes azon pontjai lehetnek csúcsai a poliédernek, amelyeken egy e_i és egy f_j egyenes is átmegy. Az ilyen pontok az e_0 egyenes E metszéspontja és f_0-nak az F metszéspontja. Ugyanis a DEF háromszög egybevágó CAB-vel, mert oldalaik ellentétes irányban párhuzamosak, és D-ből, ill. C-ből húzott magasságaik egyenlők. Ha a két pont egyikét vesszük csak hozzá A, B, C, D-hez, akkor keletkezik egy paralelogramma-lap, mi pedig most csak háromszögekkel határolt poliédert keresünk.

Az $ABCEFD$ poliédert csupa háromszöglap határolja, úgy származtatható pl. az $ABCFD$ paralelogramma-alapú gúlából, hogy azt az alaplap középpontjára tükrözzük. Nevezzük röviden kettős gúlának. Ez megfelel a feladat követelményeinek, mert akárhogy választunk ki négy csúcsot, az A, E, a B, F és a C, D szemben fekvő csúcspárok egyike köztük van, mondjuk B és F (2. *c.* ábra), és ehhez az $ACED$ paralelogramma két szomszédos csúcsát kell vennünk, ha nem egy síkban levő pontnégyest akarunk kiválasztani. Az így kapott háromoldalú gúla térfogata a kettős gúla térfogatának negyedrésze.

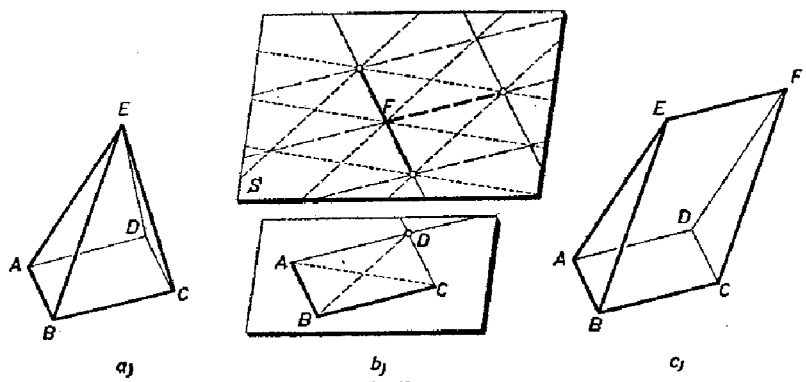
2. Keressünk most a követelményeket kielégítő olyan poliédereket, amelyeknek van háromnál több oldalú határlapja. Legyen A, B, C egy ilyen lap három egymás utáni csúcsa. Egy a síkjukban fekvő további csúcsnak rajta kell lennie az A-n átmenő, BC-vel párhuzamos egyenesen, mert egyrészt a határlap konvex, így csúcsai BC-nek azon az oldalán vannak, amelyiken A, másrészt A-val egyenlő távolságra is vannak BC-től, mert különben volna két különböző területű háromszög az ABC síkban, és ezek egy a síkon kívül fekvő csúccsal különböző térfogatú gúlákat határoznának meg. Ugyanígy adódik, hogy a C-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesen is rajta kell lennie minden további csúcsnak (3. *b.* ábra), tehát csak ezek D metszéspontja lehet még csúcsa a határlapnak, és erre az ACD háromszög területe is egyenlő az ABC-ével. Meggondolásunk azt is mutatja, hogy egy a feladat követelményeinek megfelelő poliéder minden határlapja vagy háromszög, vagy paralelogramma.

Legyen az AB élen átmenő, $ABCD$-től különböző határlap egy további csúcsa E. Az $ABCDE$ paralelogramma-alapú gúla (3. *a.* ábra) megfelel a feladat követelményeinek, mert belőle háromoldalú gúla csak az alaplap valamelyik csúcsának elhagyásával keletkezik, és ezeknek a térfogata mindig a négyoldalú gúla térfogatának a fele.

Ha a testnek 5-nél több csúcsa van, akkor hasonlóan okoskodhatunk tovább, mint a csak háromszögekkel határolt poliéderek esetében. A további csúcsok csak az E-n[1] átmenő, az ABC síkkal párhuzamos S síkban lehetnek; továbbá ahhoz, hogy az $ABCD$ lap valamelyik három csúcsával alkotott gúlák egyenlő térfogatúak legyenek, benne kell lenniük a CD élen átmenő, az ABE síkkal párhuzamos síkban, vagy lehetnek az ABE síkban. Ezek a síkok S-ből két az AB-vel párhuzamos egyenest metszenek ki (a 3. *b.* ábra folytonos vonallal kihúzott egyenesei). Az A, D, E, a B, D, E és az A, C, E csúcsokat tartalmazó csúcsnégyeseket is figyelembe véve három egyeneshármas adódik, – az előző meggondolás e_0, e_1, e_2 és f_0, f_1, f_2 egyeneseinek megfelelően, melyek rendre AD-vel, BD-vel, ill. AC-vel párhuzamosak (a 3. *b.*

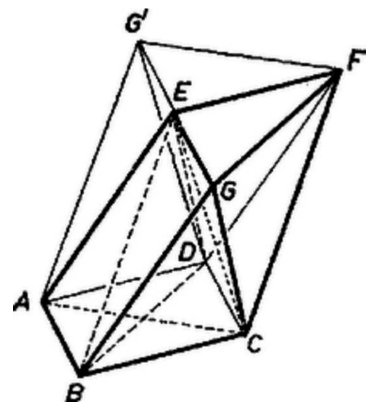
[1] A 3. *b* ábrán F javítandó E-re.

ábra hosszú szaggatott vonallal, apró szaggatott vonallal, ill. pontozva jelölt egyenesei). A további esetleges csúcsoknak mindegyik egyeneshármas valamelyik egyenesén rajta kell lennie.



3. ábra

Így azok a pontok jönnek tekintetbe poliédercsúcsokként, amelyeken négy különféleképpen jelölt egyenes megy át. Könnyen belátható, hogy ezek az egyenesek az S síkban $ABCD$-vel egybevágó paralelogrammákat, ezek átlóit és egyes csúcsokon átmenő, átlókkal párhuzamos egyeneseket alkotnak. Három olyan pont keletkezik, amelyiken mind a négy féle egyenesből megy át egy-egy; kettőbe E-ből az AB éllel párhuzamos, egyenlő hosszú, és egyező, ill. ellentétes irányú szakasz vezet, egybe pedig AD-vel párhuzamos, egyenlő hosszú és egyirányú szakasz. Az első két pontból csak az egyik tartozhatik a poliéderhez. Ha a poliéderen a három pont közül csak az egyik lesz csúcs, akkor háromoldalú hasábot kapunk (3. *c.* ábra), és minden háromoldalú hasáb megfelel a feladat követelményeinek. Ha ugyanis kiválasztunk négy csúcsot, akkor a paralelogramma lapok három közös éle közül valamelyiknek mind a két végpontja ki van választva, minden további csúcs ezek valamelyikével valamelyik paralelogramma-lapon szomszédos, tehát mindig ki van választva valamelyik paralelogramma-lap három csúcsa, és ha a négy csúcs nincs egy síkban, akkor a negyedik csúcs a paralelogrammához nem tartozó él egyik végpontja. Minden ilyen háromoldalú gúla térfogata a hasáb térfogatának harmadrésze.



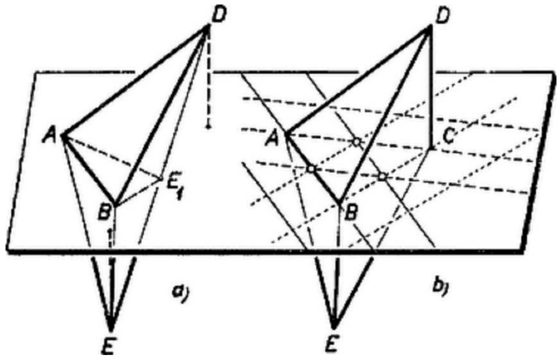
4. ábra

Megmutatjuk végül, hogy a három pont közül nem lehet kettő egyszerre csúcsa a poliédernek. Ha ugyanis az E-től AD irányban levő F pont is, az AB irányban levő G pont is csúcsa a poliédernek (4. ábra), akkor a CFG síkkal párhuzamos síkban vannak az E, B, D csúcsok (a két csúcshármas alkotta háromszög megfelelő oldalai párhuzamosak), A pedig nincs egyik síkban sem, tehát pl. az $ACFG$ és $BCFG$ gúlák különböző térfogatúak. Ha G helyett az E-re vonatkozó G' tükörképe csúcsa a poliédernek, akkor az AD és BC él szerepe cserélődik meg, a DFG' és EAC síkok párhuzamosak, és B nincs egyikben sem. Így pl. a $BDFG'$ és $ADFG'$ gúlák térfogata különböző.

A feladat követelményeinek tehát a paralelogramma-alapú gúlák, a négyoldalú kettős gúlák és a háromoldalú hasábok felelnek meg, ide számíthatók továbbá a háromoldalú gúlák.

II. megoldás. 1. Keressük sorra a követelményeket kielégítő 4-, 5-, 6- stb. csúcsú poliédereket. Egy négy csúcsú poliéder csak háromoldalú gúla lehet és az megfelelőnek tekinthető.

2. Legyen $ABCDE$ egy a követelményeknek megfelelő öt csúcsú poliéder, és A, B, C, D ennek négy nem egy síkban levő csúcsa. A konvexség miatt E nem lehet az $ABCD$ gúla belsejében vagy határán, így valamelyik három csúcsán átmenő síknak ellenkező oldalán van, mint a gúla negyedik csúcsa; legyen ez az ABC sík. A DE szakasz ABC síkkal való E_1 metszéspontja felezi a DE szakaszt, mert az $ABCD$ és $ABCE$ gúla térfogata egyenlő, így E ugyanakkora távolságra van az ABC síktól, mint D (5. *a.* ábra).



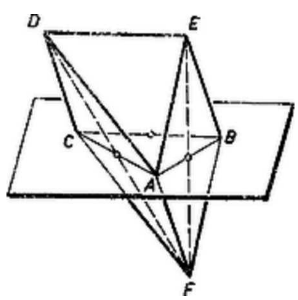
5. ábra

Vagy benne van E az ABD síkban, vagy az $ABDE$ és $ABCD$ gúlák térfogata egyenlő. Utóbbi esetben bontsuk $ABDE$-t az ABE_1D és ABE_1E gúlákra. Ezeknek a közös lapjukra bocsátott magassága egyenlő, és egyenlő az $ABCD$ gúla D-ből húzott testmagasságával. Így az ABE_1 háromszög területe fele akkora, mint az ABC háromszögé. E_1 tehát vagy az AB oldalon van, vagy azoknak az AB-vel párhuzamos egyeneseknek az egyikén, amelyek fele akkora távolságra vannak tőle, mint a C csúcs (5. *b.* ábra). Hasonlóan rajta kell lennie E_1-nek a BC oldalon, vagy annak a két vele párhuzamos egyenesnek az egyikén, amelyek BC-től félakkora távolságra vannak, mint az A csúcs; ugyancsak teljesülnie kell az AC oldalra vonatkozó megfelelő feltételnek is. Mindhárom oldallal párhuzamos egyenes csak az AB, BC, CA oldalak felezőpontjain megy át. Ezek bármelyikére is tükrözzük D-t, paralelogramma-alapú gúlát kapunk, és az E pont keresése közben már biztosítottuk, hogy az ebből kiválasztható bármelyik háromoldalú gúlának ugyanakkora legyen a térfogata.

3. Ha kiválasztjuk egy hat csúcsú, a követelményeknek megfelelő poliéder öt nem egy síkban levő csúcsát, ezek is a követelményeknek megfelelő poliédert határoznak meg, mert minden a csúcsai közül kiválasztható pontnégyes az eredeti poliéder csúcsai közül is kiválasztható, tehát bármely négy csúcs, ha nincs egy síkban, ugyanakkora térfogatú háromoldalú gúlát határoz meg.

Eszerint, ha az $ABCDEF$ poliéder teljesíti a követelményeket, akkor az itt nem egy síkban levő csúcs meghatározta: $ABCDE$ poliéder is, tehát, mint éppen láttuk, paralelogramma-alapú gúlának kell lennie. Az F csúcs vagy a gúla valamelyik háromszöglapjának, vagy a paralelogramma-lapnak ellenkező oldalán van, mint a többi csúcs.

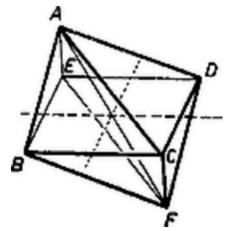
Legyen $BCDE$ a paralelogramma-lap, és F az ABC lap ellenkező oldalán, mint a gúla. Az öt csúcsú testnél követett meggondolást egyrészt az $ABCD$ gúlára és az F csúcsra, másrészt az $ABCE$ gúlára és az F csúcsra alkalmazva azt nyerjük, hogy F a D csúcsból is, és E-ből is az AB, BC, CA élek egyikének a felezőpontjára való tükrözéssel áll elő. A hat tükörkép közül csak E-nek AB felezőpontjára és D-nek AC felezőpontjára vonatkozó tükörképe esik egybe, ez lehet tehát csak az F csúcs. Ez a $AEDCFB$ háromoldalú hasáb (6. ábra).



6. ábra

A háromoldalú hasáb valóban ki is elégíti a követelményeket. Ezt tudjuk már az $ABCDE$ gúlára és az $FBCDE$ négyoldalú gúlából kiválasztható háromoldalú gúlák térfogata ugyanakkora, mint az $ABCDE$-ből kiválaszthatóké, mert a két négyoldalú gúla egyenlő térfogatú, ugyanis A és F távolsága a $BCDE$ paralelogramma síkjától ugyanakkora. Végül az F pont választása szerint az $ADCFB$, ill. az $AEBFC$ poliéderből kiválasztható háromoldalú gúlák is egyenlő térfogatúak, és térfogatuk egyenlő az $ABCD$, ill. az $ABCE$ gúla térfogatával, amik az $ABCDE$ gúlának is részei. Így az összes kiválasztható háromoldalú gúlák egyenlő térfogatúak.

4. Keressük most az olyan $ABCDEF$ poliédereket, amelyekben F az $ABCDE$ gúla $BCDE$ paralelogramma-lapjának van ellenkező oldalán, mint a gúla. Ezekre az AF szakasznak a $BCDE$ síkba eső F_1 felezőpontja az előzőkhöz hasonlóan vagy a BC egyenesen van, vagy attól félakkora távolságra, mint a DE egyenes; de ugyanakkor F_1 vagy rajta van DE-n, vagy félakkora távolságra van tőle, mint BC. A két feltételt egyszerre a paralelogramma BC-vel párhuzamos középvonalának pontjai elégítik ki (7. ábra).



7. ábra

Ugyanígy rajta kell lennie F_1-nek a CD-vel párhuzamos középvonalon is: Így F_1 a paralelogramma középpontja, F az A csúcs erre vonatkozó tükörképe, a poliéder kettős paralelogramma-alapú gúla.

Ez a test valóban kielégíti a feladat követelményeit, mert az $ABCDE$ gúlára ezt már tudjuk, F megkeresése pedig biztosította, hogy a kiválasztható, F-et és A-t tartalmazó háromoldalú gúlák térfogata egyenlő pl. $ABCD$-ével, továbbá ekkora az $FBCDE$ poliéderből kiválasztható háromoldalú gúlák térfogata is, hiszen ez a poliéder az $ABCDE$ poliéder tükörképe. Végül A-t is, F-et is elhagyva, egy síkban levő négy pont marad.

5. Megmutatjuk, hogy hatnál több csúcsú test nem elégíti ki a követelményeket. Ha kielégítené, akkor minden 7 csúcsú rész-teste is kielégítené a követelményeket. Egy ilyen 7 csúcsú testből 6 nem egy síkban levő csúcs az előzőek szerint vagy háromoldalú hasábot, vagy négyoldalú kettős gúlát határoz meg. Utóbbi esetben a hetedik G csúcs a test egy L lapjának ellenkező oldalán van, mint maga a test. De a kettős gúlának határlapja L-nek a test középpontjára vonatkozó L' tükörképe is, ami párhuzamos L-lel. Ekkor azonban két különböző térfogatú háromoldalú gúlát kapunk, ha L'-höz egyszer G-t, egyszer pedig L-nek valamelyik csúcsát vesszük.

Ha 6 csúcsot kiválasztva ezek háromoldalú hasábot határoznak meg, akkor a hetedik G csúcs ismét valamelyik határlapnak ellenkező oldalán van, mint a hasáb többi csúcsa. Az utolsó meggondolás mintájára látható, hogy G nem lehet az egyik háromszöglap ellenkező oldalán, mint a hasáb. Ha viszont G egy paralelogramma-lapnak van ellenkező oldalán, mint a hasáb, akkor a 4. pont meggondolását a paralelogramma és a további két csúcs egyike, ill. a másika alkotta gúlára alkalmazva azt kapjuk, hogy G mindkét csúcsnak tükörképe kellene hogy legyen a paralelogramma középpontjára, ez a két tükörkép azonban különböző. Így hasábhoz sem található hetedik csúcs.

Azt nyertük tehát, hogy a feladat követelményeinek a paralelogramma-alapú gúlák, a négyoldalú kettős gúlák, és a háromoldalú hasábok felelnek meg, amikhez még hozzávehetjük a háromoldalú gúlákat is, más poliédert nem.