I. megoldás. Jelöljük a középső számot c-vel, a számtani sorozat különbségét d-vel, ekkor a feladat feltételei:

$$(1)\qquad (c-2d)^3+(c-d)^3+c^3+(c+d)^3= \\ =16(c-2d+c-d+c+c+d)^2=16(2(2c-d))^2,$$

$$(2)\qquad (c-d)^3+c^3+(c+d)^3+(c+2d)^3= \\ =16(c-d+c+c+d+c+2d)^2=16(2(2c+d))^2.$$

A második az elsőből megkapható úgy, hogy d helyébe $-d$-t írunk (és a tagokat fordított sorrendbe írjuk), ez felhasználható lesz az átalakítások meggyorsítására. Az (1) egyenletet rendezve és 2-vel egyszerűsítve

$$2c^3-3c^2d+9cd^2-4d^3=128c^2-128cd+8d^2.$$

Hasonlóan (2)-ből

$$2c^3+3c^2d+9cd^2+4d^3=128c^2+128cd+8d^2.$$

Vonjuk le a második egyenletből az elsőt és osszunk 2-vel:

$$3c^2d+4d^3=128cd.$$

Ez teljesül, ha $d=0$. Ekkor (1)-ből

$$4c^3=256c^2,\quad c=0\quad \text{vagy}\quad c=64.$$

Ha $d\neq 0$, akkor a

$$3c^2-128c+4d^2=0$$

egyenletnek kell teljesülnie. Szorozzunk 3-mal és egészítsük ki az első két tagot teljes négyzetté:

$$(3)\qquad (3c-64)^2+3(2d)^2=2^{12}.$$

Itt, ha c egész, a bal oldal első tagja nem 0, és feltevésünk szerint a második sem. Legyen $3c-64=2^ku$, $2d=2^lv$, ahol u, v páratlan és $k,\ l<6$. Nem lehet k és l különböző, mert akkor 2 alkalmas hatványának kiemelése után 1-nél nagyobb páratlan szám marad vissza, s így nem keletkezhet a jobb oldali 2^{12} érték. Ha $k=l$, akkor az

$$u^2+3v^2=2^{12-2k}=4^{6-k}$$

egyenlethez jutunk, amelynek páratlan u és v-ből álló megoldását keressük. Ismeretes, hogy páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul. Az egyenlet bal oldala eszerint 8-cal osztva 4-et ad maradékul, tehát csak úgy lehet 2-nek egy hatványa, ha egyenlő 4-gyel, azaz $k=5$, $u=\pm1$, $v=\pm1$, tehát

$$3c-64=\pm32,\quad 2d=\pm32.$$

Az első egyenletből csak pozitív előjel mellett kapunk egész c-t:

$$c=32,\quad d=\pm16.$$

A feladat feltételeinek tehát a

0, 0, 0, 0, 0	64, 64, 64, 64, 64
0, 16, 32, 48, 64	64, 48, 32, 16, 0

sorozatok felelhetnek meg, és a számításokat elvégezve azt találjuk, hogy ezek valóban meg is felelnek.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva az (1) egyenlet bal oldalán az első és utolsó, továbbá a második és harmadik tag összegét alakítsuk át az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság alapján. Ekkor a bal oldal így alakul:

$$(2c-d)[(c-2d)^2-(c-2d)(c+d)+(c+d)^2]+(2c-d)[(c-d)^2- \\ -(c-d)c+c^2]=(2c-d)(2c^2-2cd+8d^2).$$

Így az egyenletet 0-ra redukálva $2(2c-d)$-t kiemelhetünk:

$$2(2c-d)(c^2-cd+4d^2-64c+32d)=0.$$

Hasonlóan a (2) egyenletből

$$2(2c+d)(c^2+cd+4d^2-64c-32d)=0.$$

Ha $d=2c$, akkor az előbbi egyenlet teljesül, az utóbbi így alakul:

$$(4)\qquad 8c^2(19c-128)=0.$$

Ennek egész gyöke csak $c = 0$, amiből $d = 0$.

A $d = -2c$ esetben az előbbi egyenlet megy át (4)-be, s így újabb megoldást nem kapunk.

Ha $d \neq \pm 2c$, akkor a következő egyenletrendszernek kell teljesülnie:

$$c^2 - cd + 4d^2 - 64c + 32d = 0,$$
$$c^2 + cd + 4d^2 - 64c - 32d = 0.$$

Az egyenletek összegének felét és különbségének felét véve az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk, hiszen az utóbbiak különbsége, ill. összege az eredeti egyenleteket adja:

$$c^2 + 4d^2 - 64c = c(c - 64) + 4d^2 = 0, \qquad (c - 32)d = 0.$$

Az utóbbi egyenletből vagy $c = 32$, vagy $d = 0$ kell, hogy teljesüljön. Az első esetben az előbbi egyenletből

$$4d^2 = 32^2 \qquad d = \pm 16,$$

az utóbbi esetben pedig

$$c = 0, \qquad \text{vagy } c = 64.$$

Ezek az előbbi megoldásban talált számtani sorozatokra vezetnek.

Megjegyzések. 1. A feltételek két ismeretlenre két egyenletet adnak, ezekből az ismeretlenekre véges sok értékpár adódik. Mint a II. megoldás mutatja, nem szükséges lényegesen kihasználni a számok egész voltát, mindössze a többi feltételeket kielégítő

$$-384/19,\ -128/19,\ 128/19,\ 384/19,\ 640/19$$

és az ennek megfordításával keletkező sorozat kizárására.

2. Az I. megoldásban az (1) és (2)-ből keletkező (3) egyenletet oldottuk meg a keresett számok egész voltát lényegesen kihasználva. A közben felmerült $c = 32/3$, $d = \pm 16$ értékpárokhoz tartozó számtani sorozatok nem csak nem állnak egészekből, de a feladat többi feltételét sem elégítik ki. Ez nem meglepő, hiszen a megoldott (3) egyenlet nem ekvivalens az (1) és (2)-ből álló egyenletrendszerrel. Ezért az I. megoldásnál szükséges a nyert sorozatokra a követelmények teljesülésének ellenőrzése. Az előző pontban említett nem egész sorozat viszont az I. megoldásban nem jelentkezett, amit az magyaráz, hogy ott csak egész megoldást kerestünk, $c = 128/19$, $d = \pm 256/19$-höz pedig a (3) egyenletnek nem egész megoldása tartozik.