I. megoldás. Írjunk γ helyébe $180^\circ - (\alpha+\beta)$-t, majd igyekezzünk szorzattá alakítani:

$$\begin{gathered}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\\=\cos\alpha+(1-\cos\alpha)\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\\=1-(1-\cos\alpha)+(1-\cos\alpha)\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\\=1-(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)+\sin\alpha\sin\beta.\end{gathered}$$

Itt a második tag nem pozitív, mert a koszinusz-függvény nem vesz fel 1-nél nagyobb értéket, a harmadik pedig kisebb 1-nél, mert egyik tényezője sem nagyobb 1-nél, de nem lehet mindkettő egyszerre 1 sem (nem lehet α is, β is 90°). Így

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<2,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. Az állítás helyes, ha a háromszög nem hegyesszögű, mert ekkor az egyik tag nem pozitív, a másik kettő mindegyike pedig 1-nél kisebb.

Hegyesszögű háromszögben válasszuk a betűzést úgy, hogy γ és a vele szemben levő $AB=c$ oldal legyen a legkisebb, illetve a legkisebbek egyike. Jelöljük továbbá γ csúcsát C-vel, az AC, BC oldalakat b-vel, ill. a-val; legyen C merőleges vetülete az AB egyenesen C_1, ez az oldal belső pontja. Így

$$c=AC_1+C_1B=b\cos\alpha+a\cos\beta.$$

Innen, mivel feltevés szerint $a\geqq c,\;\; b\geqq c$, így

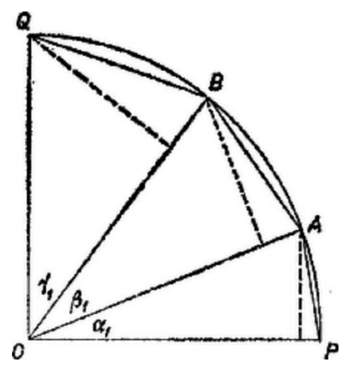
$$1=\frac{b}{c}\cos\alpha+\frac{a}{c}\cos\beta\ge\cos\alpha+\cos\beta;$$

a harmadik szögre $\cos\gamma<1$, tehát helyes az állítás hegyesszögű háromszögben is.

III. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség, mint az előző megoldásban is láttuk, nyilvánvalóan helyes, ha a háromszög nem hegyesszögű. Hegyesszögű háromszögre $\alpha_1=90^\circ-\alpha,\;\beta_1=90^\circ-\beta,\;\gamma_1=90^\circ-\gamma$ pozitív hegyesszögek, melyek összege 90°, és

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha_1+\sin\beta_1+\sin\gamma_1.$$

Ezt az összeget szemléltethetjük a következő módon: egységnyi sugarú OPQ negyedkörbe rajzoljuk be az α_1, ill. β_1 nagyságú POA, AOB szögeket (1. ábra).



1. ábra

Ekkor $BOQ\sphericalangle=\gamma_1$, és a POA, AOB, BOQ háromszögekben a sugár alkotta oldalakra merőleges magasság hossza rendre $\sin\alpha_1$, $\sin\beta_1$, $\sin\gamma_1$, így a vizsgálandó összeg az $OPABQ$ ötszög területének kétszeresével egyenlő, tehát kisebb, mint az egységnyi sugarú félkör területe, $\pi/2$. Hegyesszögű háromszögre tehát

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<\frac{\pi}{2}(<1{,}571).$$

IV. megoldás. Alakítsuk két koszinusz összegét szorzattá:

$$\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\le2\sin\frac{\alpha}{2},$$

mert mindkét tényező pozitív, hiszen $\alpha/2$ és $|\beta-\gamma|/2$ hegyesszögek. Fejezzük ki $\cos\alpha$-t is a fele akkora szög szinuszával, akkor azt nyerjük, hogy

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1-2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

A második tag nem lehet pozitív, így a bizonyítandó állításon túlmenően azt bizonyítottuk be, hogy

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Itt akkor érvényes az egyenlőség jele, ha egyrészt $\cos\big((\beta-\gamma)/2\big) = 1$, másrészt $\sin(\alpha/2) = 1/2$. Az első egy háromszög szögeire csak akkor teljesül, ha $\beta = \gamma$, a második akkor, ha $\alpha = 60^\circ$; ekkor az első feltétel szerint $\beta = \gamma = 60^\circ$, azaz a háromszög szabályos.

Az (1) egyenlőtlenségben tehát szabályos háromszögre egyenlőség, más háromszögekre a „kisebb” jel érvényes.

Megjegyzés. Az előző megoldás ábrája alapján finomabb elemzéssel szintén bizonyítható az (1) egyenlőtlenség hegyesszögű háromszögre, és kiterjeszthető a meggondolás nem hegyesszögű háromszögekre is.

V. megoldás. Fejezzük ki a szögek koszinuszát a koszinusz-tétel alapján az oldalakkal. Vizsgáljuk először két koszinusz összegét:

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} + \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac} =$$
$$= \frac{a^2-b^2}{2c}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right) - \frac{(a+b)(a-b)^2}{2abc}.$$

Mindhárom szögpárra felírva a megfelelő kifejezést és összeadva azokat, a pozitív tagok összegében fellép miden törttel a reciproka is, így az összeg a következőképpen alakítható tovább:

$$2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) -$$
$$-\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2}{2abc} =$$
$$= 3 + \frac{1}{2}\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}\right) -$$
$$-\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2}{2abc} = 3-$$
$$-\frac{(a+b-c)(a-b)^2+(b+c-a)(b-c)^2+(c+a-b)(c-a)^2}{2abc} \le 3,$$

ugyanis mindegyik négyzet szorzója pozitív, mert a háromszög két oldalának az összege nagyobb, mint a harmadik oldal. Így

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Itt akkor áll egyenlőség, ha a fenti tört számlálójában $a-b = b-c = c-a = 0$, azaz szabályos háromszögre.

Megjegyzés: többen észrevették a bal oldal következő átalakítási lehetőségét:

$$\frac{a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2-a^3-b^3-c^3}{2abc} =$$
$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)+2abc}{2abc}.$$

Innen Heron képletét, az $abc = 4rt$ és $t = \varrho s$ összefüggéseket felhasználva, ahol s a kerület felét, t a háromszög területét, r és ϱ a körülírt és beírt kör sugarát jelöli, a következőt nyerjük:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1 + \frac{16t^2}{16rts} = 1 + \frac{\varrho}{r}.$$

Világos, hogy $\varrho < r$, amiből következik a feladat állítása. Az is belátható (trigonometria felhasználása nélkül is), hogy $\varrho \le r/2$, amiből (1) következik.