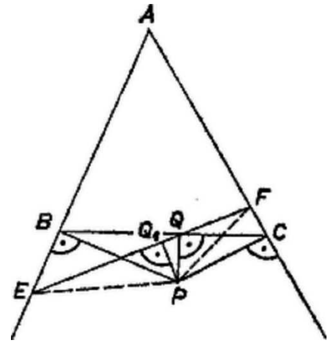
**I. megoldás.** Legyen egy a $Q$ ponton áthaladó, a $BC$-től különböző egyenesnek az $AB$ szárral való metszéspontja $E$, $AC$-vel való metszéspontja $F$ (8. ábra). A $P$-ből az $EF$-re húzott merőleges talppontja legyen $Q_1$.




*8. ábra*

Hasonlítsuk össze (Pythagoras tétele alapján) a $BQ$ és $EQ_1$, továbbá a $QC$ és $Q_1F$ szakaszokat. A $BPQ$ és $EPQ_1$ derékszögű háromszögekből

$$BQ=\sqrt{BP^2-PQ^2},\qquad EQ_1=\sqrt{EP^2-PQ_1^2}.$$

A $PQQ_1$ és $PEB$ derékszögű háromszögekből nyilvánvalóan

$$PQ>PQ_1 \tag{6}$$

$$\text{és}\quad EP>BP. \tag{7}$$

Ezek szerint $BQ$ kifejezésében a kisebbítendő kisebb, a kivonandó pedig nagyobb, mint $EQ_1$ kifejezésében, tehát

$$BQ<EQ_1. \tag{8}$$

Ugyanígy a $PFC$ derékszögű háromszögből adódó

$$PF>PC \tag{9}$$

felhasználásával a $CPQ$, $FPQ_1$ és $PQQ_1$ derékszögű háromszögekből

$$QC=\sqrt{PC^2-PQ^2}<\sqrt{PF^2-PQ^2}<\sqrt{PF^2-PQ_1^2}=Q_1F. \tag{10}$$

Megmutatjuk még, hogy $Q$ a $BC$ szakaszon, $Q_1$ az $EF$ szakaszon van. Ekkor (8)-at és (10)-et összeadva következik a bizonyítandó egyenlőtlenség:

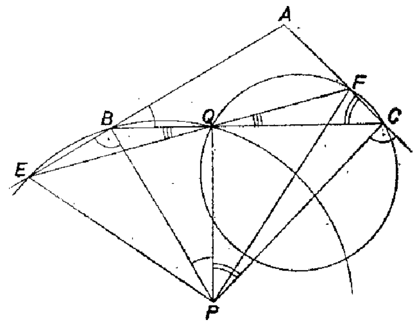
$$BC=BQ+QC<EQ_1+Q_1F=EF. \tag{11}$$

A $Q$ és $Q_1$ helyzetére kimondott állítás így látható be. Az $ABC$ háromszög $B$-nél és $C$-nél levő szöge hegyesszög, így az $AB$-re $B$-ben és $AC$-re $C$-ben állított merőlegeseknek az oldalegyenesektől a háromszöget tartalmazó félsíkba induló félegyenesei $BC$-vel hegyesszöget zárnak be. Így $P$ ezeknek a félegyeneseknek a metszéspontja, vetülete, $Q$, a $BC$ szakaszon van, és $P$ a $BC$ egyenes ellenkező oldalán fekszik, mint $A$.

Ha $E$ az $AB$ oldal $B$-n túli meghosszabbításán van – amit a továbbiakban mindig felteszünk, mert, ha kell, a betűzés megcserélésével elérhetünk –, akkor $E$ és $P$ a $BC$ egyenes ugyanazon oldalán van, tehát $BEPQ$ konvex négyszög; $E$-nél levő szöge, mint a $BEP$ derékszögű háromszög egyik szöge, hegyesszög, $Q$-nál levő szöge pedig derékszög, tehát az $EQ$ átló $PE$-vel is, $PQ$-val is hegyesszöget zár be, s így $Q_1$ az $EQ$ szakasz belső pontja. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Megjegyzés.* A feladat állítása érvényes, akármekkora is a háromszög $A$-nál levő szöge, hiszen csak a $B$ és $C$ csúcsnál levő szögről használtuk fel, hogy hegyesszögek. Világos, hogy érvényes marad akkor is, ha pl. $B$-nél derékszög van, ekkor ugyanis $P$ és $Q$ egybeesik $C$-vel. Ha viszont pl. $B$-nél tompaszög van, akkor a (11) egyenlőtlenség nem következik (8)-ból és (9)-ből, mert az utolsó két bekezdés meggondolásai nem érvényesek, $Q$ a $BC$ szakaszon kívül keletkezik, és valóban $EF$ lehet kisebb is, nagyobb is, mint $BC$.

**II. megoldás.** Az I. megoldás (7) és (9) egyenlőtlensége szerint az $EPF$ háromszögben a $P$-ből induló oldalak nagyobbak, mint a $BPC$ háromszög megfelelő oldalai. Megmutatjuk, hogy egyrészt $EPF\sphericalangle>BPC\sphericalangle$, másrészt hogy ebből, továbbá a $BCP$ és $CBP$ szögek hegyesszög voltából következik, hogy a harmadik oldal is az $EPF$ háromszögben nagyobb.



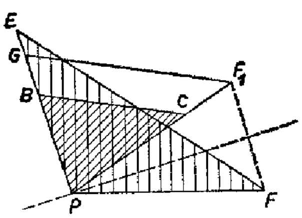

*9. ábra*

A szögekre kimondott egyenlőtlenség igazolására rajzoljuk meg a $B$, $E$, $Q$, valamint a $C$, $F$, $Q$ pontokon áthaladó köröket (9. ábra). $P$ az első kör belsejében van, mert a $BQ$ szakaszt $P$-ből az $ABC$ szöggel egyenlő szög alatt látszik (merőleges szárú hegyesszögek), $E$-ből pedig ennél kisebb szög alatt. A másik körön viszont kívül fekszik $P$, mert a $QFC$ ív $P$-ből vett látószöge akkora, mint az $ACB$ szög, a $P$-vel egy oldalon levő kiegészítő ív pontjaiból vett látószög pedig nagyobb, mert innen a $QF$ rész-ív látható ekkora szög alatt. Ezek alapján

$$EPB\sphericalangle > EQB\sphericalangle = FQC\sphericalangle > FPC\sphericalangle,$$

és a két szélső szöghöz a $BPF$ szöget hozzáadva valóban

$$EPF\sphericalangle > BPC\sphericalangle. \tag{12}$$




*10. ábra*

Az $EPF$ és $BPC$ háromszögek $EF$ és $BC$ oldalaira vonatkozó állítás igazolásához úgy forgattuk el a $BPC$ háromszöget $P$ körül, hogy $B$ a $PE$ szakaszra essék (10. ábra), a $PC$-nél hosszabb $PF$ oldalt pedig $P$-től rámértük a $PC$ félegyenesre is, a végpont $F_1$. Húzzunk most $BC$-vel párhuzamost $E$ és $F_1$ közül azon a ponton át, amelyik közelebb van $BC$-hez (a 10. ábrán az $F_1$ pont az), messe a párhuzamos $PE$-t $G$-ben. Mivel $PC < PF = PF_1$, azért nyilvánvalóan

$$BC < GF_1. \tag{13}$$

Ha az $ABC$ háromszög $B$-nél és $C$-nél levő szöge hegyesszög, akkor a $PBC$-vel egyenlő $PGF_1$ szög is hegyesszög, és így kiegészítő szöge, az $EGF_1$ szög, tompaszög. Ezért

$$GF_1 < EF_1.$$

Ezt (13)-mal egybevetve

$$BC < EF_1. \tag{14}$$

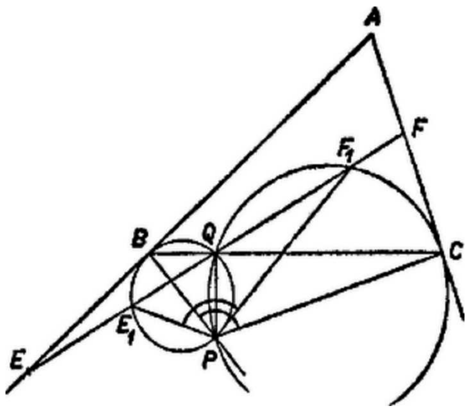
Mivel az $EPF_1$ és $EPF$ háromszögek két-két oldala egyenlő, de közbezárt szögük az előbbi háromszögben kisebb, azért[1]

$$EF_1 < EF,$$

és ezt (14)-gyel egybevetve $BC < EF$; az állítást bebizonyítottuk.

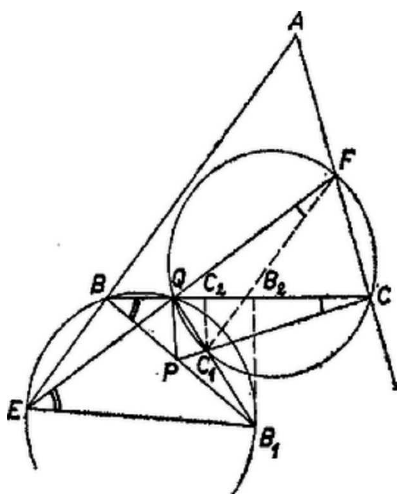
*Megjegyzés:* A (12) egyenlőtlenség a következőképpen is belátható. Rajzoljunk köröket a $BP$ és $CP$ szakaszok, mint átmérők fölé; ezek egymást $P$-ben és $Q$-ban metszik. Legyen ezek $Q$-tól különböző metszéspontja $EF$-fel $E_1$, illetőleg $F_1$ (11. ábra). $P$-ből az $E_1F_1$ szakasz ugyanakkora szögben látható, mint a $BC$ szakasz: $E_1PF_1\sphericalangle = BPC\sphericalangle$, mert a $BPF_1$ szög közös részük, nem közös $E_1PB$, illetőleg $F_1PC$ részük pedig egyenlő a vele egy íven nyugvó $E_1QB$, illetőleg $F_1QC = FQC$ szöggel, ha $F_1$ a $QF$ szakaszon, vagy annak $Q$ végpontjában van, – az utóbbi szögek viszont csúcsszögek. Ha pedig $F_1$ a $QE$ szakaszon van, akkor az $E_1QB$ szög külső szöge az $F_1PCQ$ húrnégyszögnek, az $F_1PC$ rész-szög pedig belső szög a négyszög $Q$-val szemben fekvő csúcsánál, tehát a nem közös szög-részek egyenlősége ilyenkor is fennáll.

[1] Ugyanis az $FF_1$ szakasz $P$-n átmenő felező merőlegesének ugyanazon oldalára esik $E$ és $F_1$.




*11. ábra*

Az $E_1F_1$ szakasz része az $EF$ szakasznak, az $E_1PF_1$ szög része az $EPF$ szögnek, tehát valóban fennáll $EPF\sphericalangle > BPC\sphericalangle$. (Bizonyítani kellene még az $E_1$, $F_1$ pontok helyzetéről felhasznált állítást.)




*12. ábra*

**III. megoldás.** Állítsunk merőlegest $Q$-ban $EF$-re, és messe ez a $PC$ egyenest $C_1$-ben, $PB$-t pedig $B_1$-ben; $B_1$ és $C_1$ merőleges vetülete a $BC$ egyenesen legyen $B_2$, ill. $C_2$ (12. ábra). $E$ az $AB$ oldal meghosszabbításán van, ezért a merőleges a $PQC$ derékszögű szögtartományban halad, tehát a $BCP$ háromszög $PC$ oldalát és a $BP$ oldal meghosszabbítását metszi, továbbá $C_2$ a $QC$ szakaszon adódik. Ezért $QC_1 < QB_1$, és egyszersmind

$$QC_2 < QB_2. \tag{15}$$

$C$ és $Q$ rajta van a $C_1F$ átmérő fölötti Thales-körön. A $QFC_1$ és $QCC_1$ szögek egyenlők, mint ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek, így a $QFC_1$ és $C_2CC_1$ derékszögű háromszögek hasonlók. A két átfogó közül $FC_1$ a nagyobb, mert a körnek átmérője, tehát a megfelelő befogókra

$$FQ > CC_2. \tag{16}$$

A $BC$-ből még fennmaradt $C_2B$ szakasz helyett a nála nagyobb $B_2B$-ről mutatjuk meg, hogy kisebb az $EF$-ből fennmaradt $EQ$-nál. ($B_2B$ a $BC$-nél nagyobb is lehet.) Ehhez a $BB_1B_2$ és az $EB_1Q$ háromszögeket hasonlítjuk össze. $B$ és $Q$ rajta van az $EB_1$ átmérő fölé rajzolt Thales-körön, ezért egyrészt

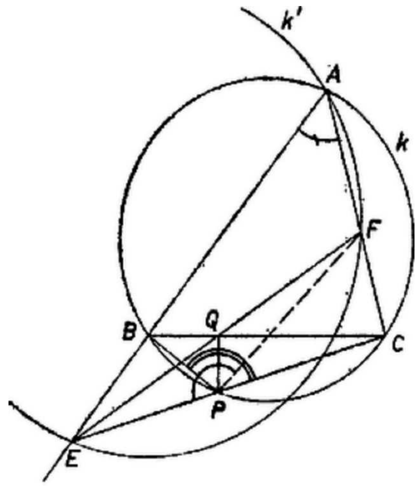
$$EB_1 > BB_1,$$

másrészt a két háromszögben az egy íven nyugvó $B_1EQ$ és $B_1BQ$ kerületi hegyes szögek egyenlők. Így a két háromszög hasonló, és az $EB_1Q$ háromszög oldalai nagyobbak, tehát

$$EQ > BB_2. \tag{17}$$

Most már a (15)–(17) egyenlőtlenségek alapján valóban

$$EF = EQ + QF > BB_2 + C_2C = BQ + QB_2 + C_2C > BQ + QC_2 + C_2C = BC.$$




*13. ábra*

**IV. megoldás.** A feladat állítása következik abból is, ha megmutatjuk, hogy az $AEF$ háromszög köré írt $k'$ kör átmérője nagyobb, mint az $ABC$ háromszög köré írt $k$ kör átmérője (13. ábra), hiszen nagyobb körben ugyanakkora kerületi szög – ti. a $BAC = EAF$ szög – nagyobb húr felett nyugszik.

A $k$ kör átmegy $P$-n is, és $AP$ a kör egy átmérője, mert az $ABPC$ négyszögben a $B$ és $C$ csúcsnál derékszög van. Elég tehát belátnunk, hogy $P$ a $k'$ kör belsejében van, hiszen ekkor $k'$-nek van $k$ átmérőjénél nagyobb húrja, ezért $k'$ átmérője nagyobb, mint $k$ átmérője. $P$ valóban $k$ belsejében van, mert (8) alapján

$$EFP\sphericalangle > BPC\sphericalangle = 180^\circ - BAC\sphericalangle = 180^\circ - EAF\sphericalangle,$$

és az $EF$ szakasz a $k'$ kör ($A$-t nem tartalmazó) $EF$ ívének pontjaiból látszik $180^\circ - EAF$ szög alatt. Ennél nagyobb szög alatt az $EF$ szakaszt csak a $k'$ kör belső pontjaiból lehet látni. Ezt akartuk bizonyítani.