I. megoldás. Fejezzük ki a három paramétertől függő K kifejezést egyetlen paraméterrel, pl. x-szel. A feltételi egyenletekből összeadással és rendezéssel

$$y = \frac{10}{7} - x, \tag{4}$$

és ezt felhasználva pl. (2)-ből

$$z = \frac{9}{7} - \frac{3}{2}x. \tag{5}$$

A feltétel alapján x nem lehet negatív, a 0 értéket azonban már felveheti, mert $x = 0$ esetén (4) és (5) szerint y és z pozitívok, x minimális értéke tehát 0. Másrészt abból, hogy y és z nem negatív, x-re (4) és (5) alapján

$$x \leq \frac{10}{7}, \quad \text{illetve} \quad x \leq \frac{6}{7}$$

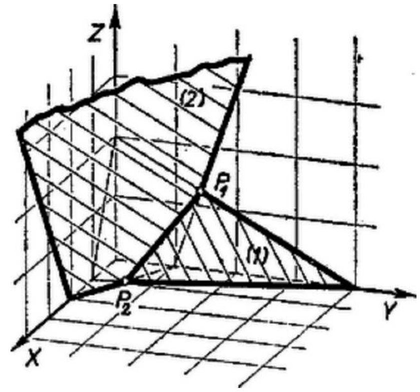
adódik, tehát x maximális értéke $\frac{6}{7}$.

(4) és (5) felhasználásával

$$K = 5x - 6y + 7z = \frac{x}{2} + \frac{3}{7},$$

ennek értéke x növekedésével nő, tehát legkisebb és legnagyobb értéke – az x minimális és maximális értékét behelyettesítve –

$$K_{\min} = \frac{3}{7}, \quad \text{illetve} \quad K_{\max} = \frac{6}{7}.$$



6. ábra

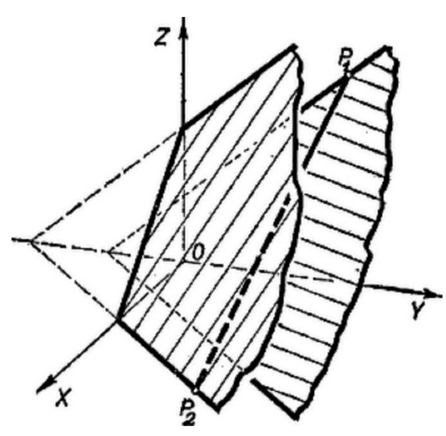
II. megoldás. Szemléltessük a feladatban szereplő háromváltozós kifejezéseket egy térbeli derékszögű koordinátarendszerben. (A térbeli koordináta geometria bizonyos elemeinek ismeretét ebben a megoldásban feltételezzük.)

A (2) és (3) egyenletek egy-egy síkot határoznak meg a térben (6. ábra). A mind a két egyenletet kielégítő számhármasok az e két sík metszésvonalán elhelyezkedő pontok koordinátái. Az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ további feltételek miatt ennek a metszésvonalnak csak az első térnyolcadba (és annak határára) eső része jön szóba, ez pedig a $P_1(0,\ 10/7,\ 9/7)$ ponttól a $P_2(6/7,\ 4/7,\ 0)$ pontig terjed.

Az $5x - 6y + 7z = K$ egyenlet minden adott K értékre egy-egy síkot határoz meg, amely az X-, Y-, Z- tengelyből rendre

$$a = K/5, \quad b = -K/6, \quad c = K/7$$

hosszúságú szakaszt metsz le. Ezek egyenes arányban vannak K-val, tehát a különböző K értékekhez tartozó síkoknak a koordináta-síkokba eső metszésvonalai párhuzamosak, így maguk a síkok is párhuzamosak.



7. ábra

Ábrázoljuk a párhuzamos síksereg P_1-en, illetve P_2-n átmenő egyedét (7. ábra). K értéke P_1-ben $3/7$, P_2-ben $6/7$, különbözők, így P_1-en és P_2-n a síksereg két különböző egyede halad át, a tengelymetszetek

$$a_1 = 3/35, \qquad b_1 = -3/42, \qquad c_1 = 3/49, \qquad \text{illetve}$$
$$a_2 = 6/35, \qquad b_2 = -6/42, \qquad c_2 = 6/49.$$

A P_1P_2 szakasz minden egyes belső pontján a párhuzamos síkseregnek egy és csak egy – a két megrajzolt sík közti – egyede megy át. A tengelymetszetekből megállapítható, hogy P_1-től P_2 felé haladva K értéke növekszik, tehát a fenti K_1 a legkisebb, K_2 a legnagyobb érték.