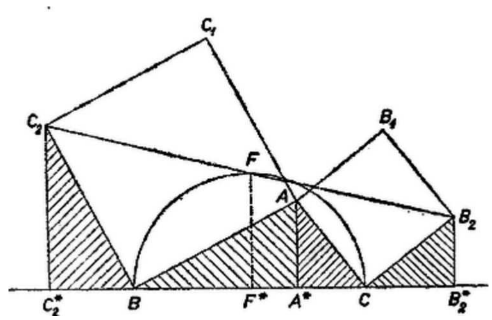
I. megoldás. Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, amikor B_2 és C_2 a BC egyenesnek ugyanazon az oldalán van, vagyis amikor a háromszög B-nél és C-nél levő szöge hegyesszög.

Vetítsük az A, B_2, C_2 pontokat és a C_2B_2 szakasz F felezőpontját a BC egyenesre, legyenek vetületeik rendre A^*, B_2^*, C_2^* és F^* (1. ábra). Minthogy a négyzeteket kifelé szerkesztettük, B_2^* ill. C_2^* a BC szakasz C-n, ill. B-n túli meghosszabbításán van.



1. ábra

A $C_2C_2^*B$ és BA^*A derékszögű háromszögek egybevágók, mert $C_2B = BA$, és $C_2^*C_2B\sphericalangle = A^*BA\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek. Hasonlóan az AA^*C és $CB_2^*B_2$ derékszögű háromszögek is egybevágók. Ezekből következik, hogy a $C_2C_2^*B_2^*B_2$ trapéz két párhuzamos oldalának összege

$$C_2C_2^* + B_2B_2^* = BA^* + A^*C = BC,$$

és így a trapéz középvonalának hossza

$$FF^* = \frac{BC}{2},$$

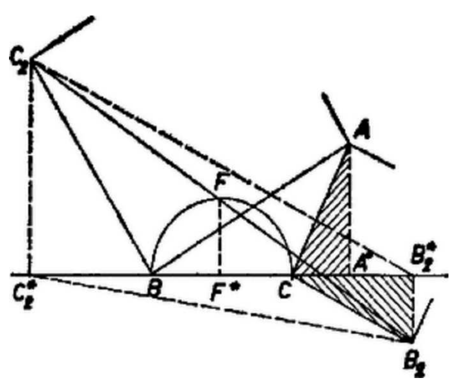
továbbá ez a középvonal merőleges BC-re. Ez azt jelenti, hogy F a BC egyenes F^* pontjától és egyszersmind magától az egyenestől is $BC/2$ távolságra van.

Bebizonyítjuk még, hogy F^* a BC szakasz felezőpontja. Ezekből már következik, hogy F rajta van a BC fölé, mint átmérő fölé rajzolt körön, mégpedig a BC-re merőleges átmérő egyik végpontja F.

F^* egyrészt felezi a $C_2^*B_2^*$ szakaszt, másrészt az F^*C szakasz ugyanannyival kisebb $F^*B_2^*$-nál, mint BF^* a $C_2^*F^*$-nál, tudniillik – a fenti egybevágóságok szerint – AA^*-gal. Így F^* valóban felezi a BC szakaszt. Ezzel a bizonyítást – a tett megszorító feltétel teljesülése esetére – befejeztük.

Ha az ABC háromszögben a B-nél és C-nél levő szögek valamelyike, mondjuk a C-nél levő, derékszög, akkor egyszerűbb helyzettel állunk szemben, mert B_2 a BC egyenesen adódik, és a $C_2C_2^*B_2^*B_2$ trapéz szerepét a $C_2C_2^*B_2$ derékszögű háromszög veszi át; a bizonyítás ennek megfelelő, kézenfekvő egyszerűsítésekkel ebben az esetben is alkalmazható.

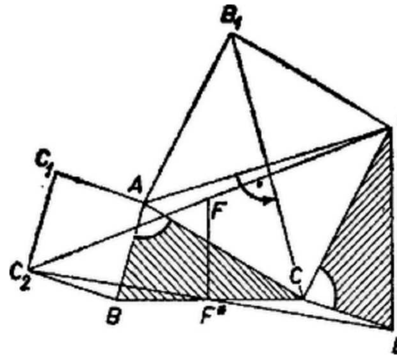
Ha pedig, mondjuk C-nél, tompaszög van, akkor a B_2C_2 és $B_2^*C_2^*$ szakaszok metszik egymást, a $C_2C_2^*B_2B_2^*$ trapéz átlói lesznek (2. ábra), FF^* az ezek felezőpontjait összekötő szakasz. Ez – mint könnyen bebizonyítható – minden konvex trapézban egyenlő a párhuzamos oldalak különbségének felével, az utóbbiról pedig a hegyesszögű esetben alkalmazott gondolatmenettel belátható, hogy egyenlő a BC szakasznak a felével. Ezek szerint az állítás minden háromszögre érvényes.



2. ábra

Megjegyzés. A fenti megoldáshoz hasonló gondolatmenettel – alkalmas koordinátarendszert választva – egyszerű analitikus geometriai megoldás is adható.

II. megoldás. Forgassuk el az ABC háromszöget az ACB_2B_1 négyzet középpontja körül 90°-kal úgy, hogy A a C-be kerüljön. Így C a B_2-be kerül, B elforgatott helyzete pedig legyen B' (3. ábra). Ekkor $B'C$ merőleges BA-ra és egyenlő vele, tehát párhuzamos, egyenlő és egyező irányítású BC_2-vel. Így B, C_2, C, B' ebben a sorrendben paralelogrammát határoznak meg, tehát a BC átló F^* felezőpontja a C_2B' átlót is felezi.



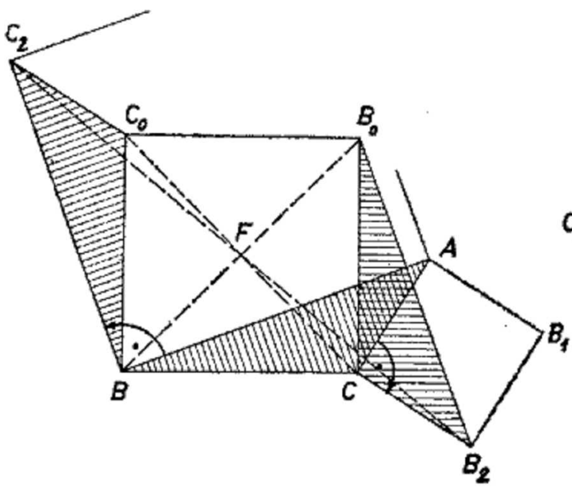
3. ábra

A végzett forgatás folytán $B'B_2$ merőleges BC-re és egyenlő vele. Most már az FF^* szakasz a C_2B_2B' háromszög középvonala, tehát egyenlő a $B'B_2$ és BC szakaszok felével. Ezek szerint B, C és F egyenlő távolságra vannak F^*-tól, ez pedig azt jelenti, hogy F a BC átmérő fölé rajzolt körön van.

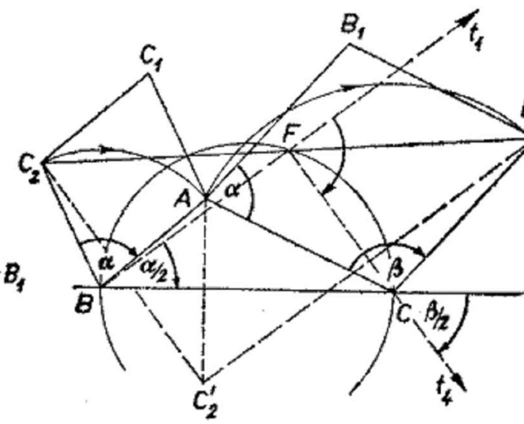
Ez a bizonyítás tetszés szerinti alakú ABC háromszög esetén érvényes.

III. megoldás. Forgassuk el az ABC háromszöget előbb B körül $90°$-kal úgy, hogy A a C_2-be jusson, majd C körül $90°$-kal úgy, hogy A a B_2-be jusson, legyen az első esetben C új helyzete C_0, a második esetben B új helyzete B_0 (4. ábra). A két forgatás ellentétes irányú, a négyzetek kifelé való szerkesztése miatt. A két forgatási szög összege $180°$, ezért BC_2 és B_0B_2 párhuzamosak és ellentétes irányúak. Továbbá egyenlőek is, és ezért a $BC_2B_0B_2$ négyszög paralelogramma. Így a C_2B_2 átló kérdéses F felezőpontja a BB_0 átlót is felezi.

Másrészt a forgatásokból következik, hogy a BC_0B_0C négyszög négyzet, tehát az átlók közös F felezőpontjából az oldalak derékszögben látszanak, így F a BC oldal, mint átmérő fölé rajzolt Thales-körön van, éppen a BC-re merőleges átmérő egyik végpontja.



4. ábra



5. ábra

IV. megoldás. A C_2 pontot átvihetjük B_2-be úgy, hogy elforgatjuk először B körül $\alpha = 90°$-kal, – így A-ba kerül –, majd A-t elforgatjuk C körül ugyanabban az irányban $\beta = 90°$-kal (5. ábra).

Ismeretes, hogy egy (síkbeli) forgatás helyettesíthető bármely két olyan egymás utáni tükrözéssel, amelyek tengelye átmegy a forgatás középpontján, és az első tengelyt a második tengelybe átvivő forgatás fele akkora szögű, mint az eredeti forgatás, és azzal megegyező irányú.

Helyettesítsük a mondott forgatásokat két-két tükrözéssel úgy, hogy ezek t_1, t_2 és t_3, t_4 tengelypárja közül t_2 és t_3 azonos legyen. Így ugyanis a harmadik tükrözés visszaállítja a második tükrözés előtti helyzetet, és a négy tükrözés kettőre csökkenthető. Mivel t_2 nek B-n, t_3-nak C-n kell átmennie, így mindkettőnek egyaránt a BC egyenest kell választanunk. Ilyen választás mellett C_2-t a B-n áthaladó és BC-vel $\alpha/2$ szöget bezáró t_1, majd a C-n átmenő és BC-vel $\beta/2$ szöget bezáró t_4 tengelyen való tükrözés viszi át B_2-be.

Ez a két tükrözés – az idézett tétel megfordítása alapján – helyettesíthető egyetlen forgatással, amelynek középpontja a t_1 és t_4 metszéspontja, szöge kétszer akkora, mint a t_1-et t_4-be átvivő forgatás, és iránya megegyezik az utóbbi forgatás irányával. A két tengely szöge (mint a t_1, t_2 és t_4 határolta háromszög külső szöge)

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°, \tag{1}$$

így C_2-t a B_2-be $180°$-os forgatás viszi át, vagyis a tengelyek metszéspontja éppen a B_2C_2 szakasz F felezőpontja.

Mivel pedig az F pontból a BC szakasz $90°$-os szögben látszik, azért F rajta van a BC átmérőjű Thales-körön, ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A bizonyításban α-ról és β-ról csak azt használtuk fel (1)-ben, hogy összegük $180°$. A feladat állítása tehát helyes marad akkor is, ha a háromszög AB és AC oldalára kifelé olyan rombuszokat rajzolunk, melyeknek B-nél, ill. A-nál levő szöge egyenlő; továbbá akkor is, ha mindkét oldalra befelé rajzoljuk a rombuszokat. Az általánosított állítás bizonyítható – értelemszerű módosításokkal a II. és III. megoldás gondolatmenetével is.