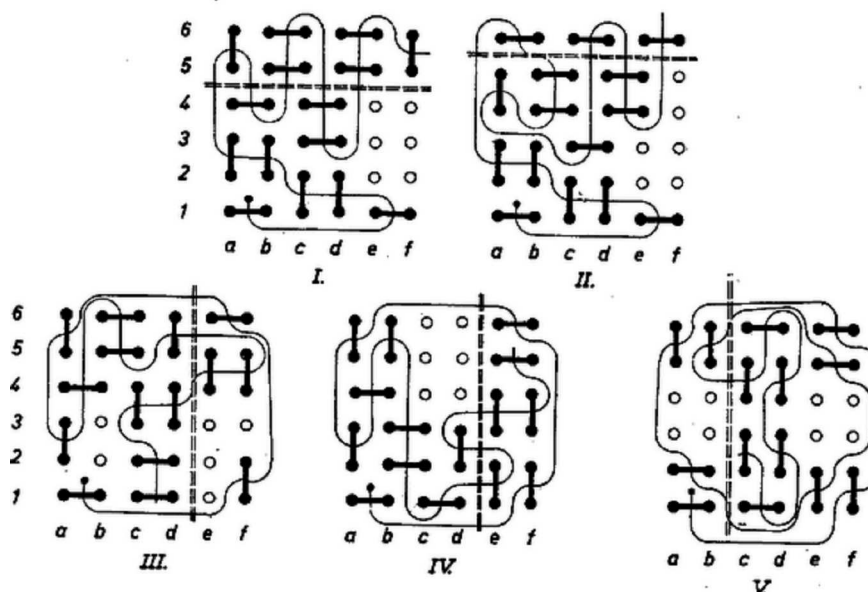


I. megoldás. Megkíséreljük rendszeres próbálgatással a kívánt módon lefedni a táblát és látni fogjuk, hogy ez nem sikerül. Hogy könnyebben tudjuk magunkat kifejezni – a sakkhoz hasonlóan – az oszlopokat az $a - f$ betűkkel, a sorokat az $1 - 6$ számokkal fogjuk jelölni, a dominókat az általuk lefedett mezők megjelölésével, pl. $(b - c, 4)$ dominó, $(c, 1 - 2)$ dominó. Az előbbivel párhuzamos dominókat vízszintesnek, az utóbbival párhuzamosakat függőlegesnek fogjuk mondani. Rajzban a mezőket középpontjaikkal jelöljük, a dominókat az általuk lefedett mezők középpontjainak összekötésével.

I. Tekintsük először a tábla sarkait lefedő dominókat. Lehet, hogy van két szomszédos sarok, amelyeket egy sorba vagy egy oszlopba eső dominók fednek le. Ekkor feltehetjük, hogy ezek az $(a - b, 1)$, $(e - f, 1)$ dominók, mert a középpont körüli elforgatással minden más helyzet átvihető ebbe. Az 1. és 2. sort elválasztó vonal – vagy röviden $1 - 2$ vonal – ez esetben csak a c vagy d oszlopba helyezett dominót vághat ketté, és ha az egyikben kettévág egy dominót, akkor a másiknak az 1. sorbeli mezeje is csak függőleges dominóval fedhető le. (Az ábrákon a dominókat az $(a - b, 1)$ dominótól kezdve egy folytonos vonallal áthúztuk helyzetük megállapításának sorrendjében.) A $2 - 3$ vonal vagy az a és b , vagy az e és f oszlopok egyikében kell, hogy átvágjon egy dominót. Szimmetria miatt feltehető, hogy az első két oszlop egyikében átvág egyet, s ekkor ismét a másik oszlop 2. sorbeli mezeje is csak függőleges dominóval fedhető.

Fedjük most az $a6$ mezőt függőleges dominóval, ekkor $a4$ -et vízszintessel kell. A $b - c$ vonalnak az 5. és 6. sorban kell egy-egy vízszintes dominón átthaladnia (ismét úgy érve, hogy ha bármelyikben átszel egy vízszintes dominót, a másikban is át kell szelnie egyet; hasonló okoskodást a továbbiakban nem részletezünk). A $c - d$ vonal ekkor a 3. és 4. sorban metsz át egy-egy dominót, a $d - e$ vonal az 5. és 6. sorban; az $f6$ sarokmezőt ekkor függőleges dominóval kell fedni, így azonban a $4 - 5$ vonal nem metsz át dominót.



3. ábra

II. Fedjük most az első 6 dominó előzőek szerinti elhelyezése után $a6$ -ot vízszintes dominóval, ekkor a $b - c$ vonal a 4. és 5. sorban metsz dominót, mivel bármelyikbe helyezve egyet az $(a, 4 - 5)$ dominó szükségessé válik. Ekkor $c3$ -at és $c6$ -ot egy-egy vízszintes dominóval kell fedni, így a $d - e$ vonal a 4. és 5. sorban metsz egy-egy dominót és $e6$ -ot ismét vízszintes dominó fed. Így azonban az $5 - 6$ vonal nem metsz már át egyetlen dominót sem. Olyan lefedés tehát nincs, amelyikben valamelyik szélső sor vagy oszlop tartalmazná a két szélső mezejét lefedő dominókat.

III. Egy átlóra való tükrözéssel – ha kell – elérhetjük, hogy $a1$ -et vízszintes dominó fedje. Ekkor $f1$ -et függőleges, $f6$ -ot vízszintes, $a6$ -ot ismét függőleges dominó kell, hogy fedje. Vizsgáljuk először az olyan lefedéseket, amelyekben valamelyik sarokdominóhoz a tábla szomszédos széle mentén rá merőleges dominó csatlakozik. Egy forgatással elérhetjük, hogy $a2$ -t fedje függőleges dominó, ekkor $a4$ -re vízszintes kerül. Fedjük továbbá $b6$ -ot vízszintes dominóval, mikor is $b5$ -re vízszintes, $d6$ -ra függőleges dominó kerül. Ekkor a $4 - 5$ vonalnak az e és f oszlopban, a $3 - 4$ vonalnak pedig a c és d oszlopban kell dominót átmetsznie. Ezután a $c - d$ vonal az 1. és 2. sorban metszhet csak át egy-egy dominót, a $d - e$ vonal pedig nem metsz át egyet sem.

IV. Hagyjunk a sarokdominók III. szerinti elhelyezése után $a2$ -n függőleges dominót és helyezzünk $b6$ -ra is függőlegest. Közben $a4$ -et ismét vízszintes dominóval kellett fedni, így a $b - c$ vonal a 2. és 3. sorban metsz át egy-egy dominót, minek következtében $c1$ -et vízszintes, $e1$ -et, majd $d2$ -t függőleges dominóval kell fedni. A $3 - 4$ vonal ekkor az e és f oszlop egy-egy dominóját szeli át és szerepelnie kell az $(e - f, 5)$ dominónak. Így azonban a $d - e$ vonal ismét nem metsz át dominót.

Ezzel kizártuk az összes olyan lefedéseket is, amelyekben a sarkokat III. szerint fedve le, a lefedő dominóhoz a tábla másik oldala mentén merőlegesen álló dominó csatlakozik.

V. Az olyan lefedéseket kell még vizsgálnunk, amelyekben a sarokmezők III. szerint vannak lefedve, továbbá a_2 -t és f_5 -öt vízszintes, 1-et és b_6 -ot függőleges dominó fed. A 2 – 3 és 4 – 5 vonal két-két c és d oszlopbeli dominót kell, hogy átmenjen, és szükség van a $(c - d, 1)$, $(c - d, 6)$ dominókra, ez esetben azonban a $b - c$ és $d - e$ vonal már nem metsz dominót.

Ezzel minden lehetséges úton megkíséreltünk olyan lefedést készíteni, amelyben minden vonal átmetsz legalább egy dominót, így meggyőződünk róla, hogy ilyen lefedés nem lehetséges, a feladat állítása tehát helyes.

II. megoldás. Igen rövid úton célhoz érhetünk próbálgatás helyett egy kis okoskodással.

Bármely két sort vagy oszlopot elválasztó vonal két olyan részre vágja a táblát, amelyek mindegyike páros számú mezőt tartalmaz (hiszen ez minden sorra, ill. minden oszlopra külön is áll). Ha egy dominót úgy helyezünk el, hogy a kiszemelt vonal átmenjen, akkor mindkét részben páratlan számú fedetlen mező marad, ezek csak úgy fedhetők le, ha legalább még egy dominó (és mindig páros számú) a vonal mindkét oldalán fed egy-egy mezőt. Így minden vonalnak legalább 2 – 2 dominót kell átmetszenie.

A táblát $6 \cdot 6/2 = 18$ dominó fed le. Másrészt a sorokat is, az oszlopokat is 5 – 5 vonal választja el; ahhoz, hogy ezek mindegyike átmenjen legalább 2 dominót, legalább 20 dominóra lenne szükség, annyi pedig nincs, tehát nem metszhet át minden elválasztó vonal dominót.

Megjegyzés. A II. megoldás gondolatmenete messzemenő általánosítást tesz lehetővé. Tekintsünk egy $u \times v$ mezőből álló táblát. Ha u is, v is páratlan, a tábla nyilván nem fedhető le hézagtalanul és átfedés nélkül dominókkal. Ha u is, v is páros, akkor a fenti gondolatmenet azt adja, hogy legfeljebb akkor lehet a feladat megoldható, ha

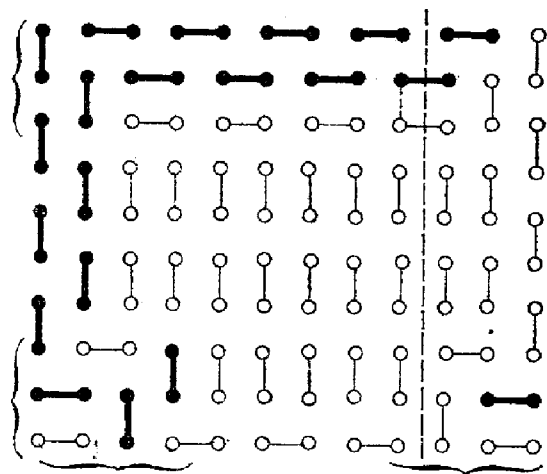
$$2(u - 1 + v - 1) \leq \frac{uv}{2}, \quad \text{vagyis} \quad (u - 4)(v - 4) \geq 8.$$

Ha u páratlan, v páros, akkor az u hosszúságú sorok választó vonalai közül a szélsőtől kezdve minden második páratlan számú dominót metsz át, a többi páros számút, a v hosszúságú sorok választó vonalai mind páros számú dominót metszenek át, amiből

$$(u - 3)(v - 4) \geq 4$$

adódik szükséges feltételül. Ebből következik, hogy ha u vagy, v legfeljebb 4, akkor soha sincs kívánt lefedés, továbbá nincs a feladatban szereplő 6×6 -os táblára.

A 4. ábráról leolvasható, hogy mindazokban az esetekben, amelyeket eddigi megfontolásaink nem zártak ki, lehetséges olyan lefedés, amelyben minden választó vonal átmetsz dominót. Az ábra olyan táblát mutat, amelynek páros számú sora és oszlopa van. Minden vonal átmetsz egyet a vastagabban jelölt dominók közül. Világos, hogy a középtájt elhelyezkedő azonos szerkezetű sorok és oszlopok száma tetszés szerinti páros számmal növelhető. A tábla szélein kapoccsal ($\{$) megjelölt soroknak és oszlopoknak azonban mindig szerepelniük kell, a legkisebb így lefedhető táblának tehát a 8×6 mezős adódik.



4. ábra

Ha elhagyjuk a szaggatott vonaltól jobbra eső 3 oszlopot, akkor két mező, amelyeket ezen a vonalon átnyúló dominó fedett (a 2. és 3. sorban), lefedhető egy függőleges dominóval (az ábra pontozva jelzi). Így páratlan számú oszlopból és páros számú sorból álló táblák lefedését kapjuk. Ismét csak az a lényeges, hogy a kapoccsal megjelölt sorok és oszlopok fellépjenek, a legkisebb ilyen módon lefedhető tábla tehát 5×6 mezős. Az 5×6 -os és 7×6 -os tábla lefedettségére kiemeli a feladat állításának sajátos helyzetét.