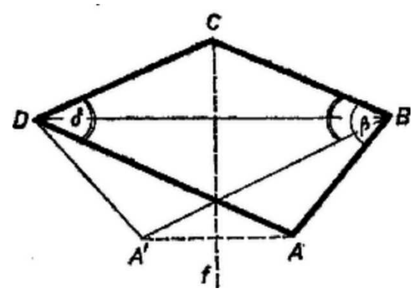
Megoldás. Legyen $ABCD$ egy a követelményeknek megfelelő négyszög. A betűzést válasszuk úgy, hogy $AB \leq AD$ legyen. A B-nél és D-nél levő szög legyen β, illetve δ. Tükrözzük a négyszöget a BD átló felező merőlegesére. Ekkor C helyben marad, B és D egymás tükörképei. Legyen A tükörképe A', ezek különbözők, ha $AB \neq AD$. Ezt egyelőre feltesszük. Az $AA'B$ háromszögben ismert az AB és $A'B = AD$ oldal, továbbá a köztük levő szög, mint β és δ különbsége. Ebből az $AA'B$ háromszög és abból a négyszög megszerkeszthető, pl. a következő módon. Egy B csúcsú, $|\beta - \delta|$ nagyságú szög száraira rámérjük az adott BA és $BA' = DA$ hosszúságokat. Húzzuk meg az AA' szakasz f felező merőlegesét; mérjük az AB oldalra B végpontjában a β szöget. E szög A-t nem tartalmazó szárának f-fel való metszéspontja adja C-t, B-nek f-re vonatkozó tükörképe D-t.



1. ábra

A szerkesztés az $AB < AD$ esetben csak akkor adhat a feltételeknek megfelelő négyszöget, ha $\beta > \delta$. Ugyanis $AD = A'B > AB$ folytán A és B ugyanazon a partján van f-nek, D az ellenkezőn, így az AD és $A'B$ szakaszok metszik egymást f-en; más szóval BA' metszi az AD oldalt, s így az ABC konvex szögtartományban halad, tehát

$$\delta = A'BC\sphericalangle < ABC\sphericalangle = \beta.$$

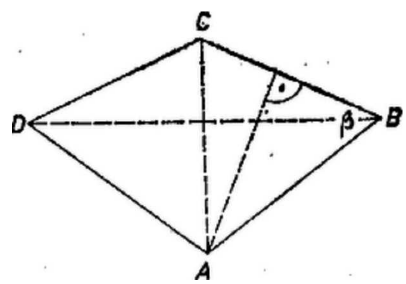
Ha ez teljesül, és a szerkesztés elvégezhető, akkor egy négyszöget kapunk, és ennek oldalai és szögei a kívánt tulajdonságúak: $BC = CD$ teljesül, és $AD = A'B$ a kívánt nagyságú, $ABA'\sphericalangle = \beta - \delta$, így $ABC\sphericalangle = \beta$ mellett

$$ADC\sphericalangle = A'BC\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABA'\sphericalangle = \beta - (\beta - \delta) = \delta$$

is a kívánt nagyságú. Nem föltétlenül lesz azonban konvex a négyszög.

Az is lehet, hogy a szerkesztés egy C pontot sem ad, ha ugyanis β-nak az A-t nem tartalmazó szára párhuzamos f-fel, vagy a meghosszabbítása metszi f-et. A feladatnak tehát akkor van megoldása és csak egy, ha a β szög A-t nem tartalmazó szára metszi az f egyenest, éspedig a BD egyenes ellenkező oldalán, mint amelyiken A van. Az egyes lehetőségek feltételeit az adatokra vonatkozó összefüggésekkel fejezni ki igen körülményes és bonyolult számítási feladatot igényelne.

Ha $AB = AD$, akkor a négyszög deltoid, tehát $\beta = \delta$ kell hogy teljesüljön, ha pedig ez fennáll, akkor végtelen sok négyszög kielégíti a feltételt. Ugyanis egy β nagyságú szög egyik szárára rámérjük a B csúcsból a BA távolságot, a másik száron kijelölünk tetszés szerint egy C pontot, ha β nem hegyes szög, ha pedig hegyes szög, akkor C-t A-nak a száron levő vetületénél messzebb választjuk a csúcstól, végül vesszük a B pont D tükörképét AC-re. Az $ABCD$ deltoid konvex és AB, AD oldala, továbbá B-nél és D-nél levő szöge a kívánt nagyságú. Ekkor tehát a feladat határozatlan.



2. ábra

Megjegyzés. Többen háromszögnek egy oldalából, a rajta fekvő egyik szögből és a másik két oldal összegéből való megszerkesztésére vezették vissza tükrözéssel a feladatot. Ennek megoldása viszont megint csak lényegében a fenti $AA'B$ háromszög megszerkesztésére vezet.