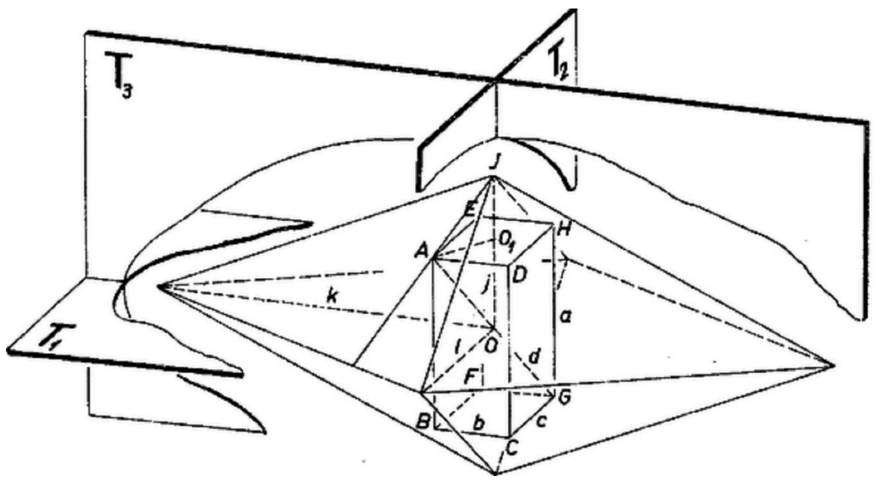
Jelöljük a tégla csúcsait A, B, C, D, E, F, G, H-val ($ABCD$ egy határlap és $AE \| BF \| CG \| DH$); a, b, c legyen rendre az AB, AD, AE élek hossza. A testátlók hosszát jelöljük d-vel, a tégla középpontját O-val; tudjuk, hogy $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Állapítsuk meg először az átlókra merőleges síkok közt keletkező T test alakját. Az AB, AD, AE élek T_1, T_2, T_3 felező merőleges síkjaira tükrözve a téglát, az önmagába megy át, testátlói ismét testátlókba, így az azokra merőleges síkok is egymásba mennek át, tehát a T test is szimmetrikus T_1, T_2, T_3-ra.

A szimmetriasíkok létesítette térnyolcadok mindegyike egy téglacsúcsot tartalmaz. Az ebben a megfelelő testátlóra merőlegesen állított sík a szimmetriasíkokkal egy-egy 3-oldalú gúlát határoz meg, melynek egyik csúcsa, O, és az ebben találkozó lapjai, amelyek a szimmetriasíkokban vannak, páronként merőlegesek. A testátlóra merőleges sík valóban a szimmetriasíkok metszésvonalainak a térnyolcadot határoló félegyeneseit metszi, mert a testátló átmegy O-n, ami a félegyenesek közös pontja és hegyes szöget alkot a félegyenesekkel. Egy ilyen gúla a szimmetriasíkokra való tükrözéssel sorra átvihető az összes többibe, és a 8 gúla együttesen alkotja T-t, amelynek határfelülete így 8 egybevágó háromszögből áll, élei a szimmetriasíkokban vannak, csúcsai ezek metszésvonalain.



4. ábra

Könnyű belátni (ezt számításainkban nem fogjuk felhasználni), hogy az egy szimmetriasíkban levő élek egy-egy rombuszt alkotnak, ezen mint alapon nyugvó két egyenes gúlából tevődik össze T. Az ilyen testet a kristálytanban rombos bipiramisnak nevezik.

T térfogata a szimmetriasíkok közti egy nyolcadba eső háromoldalú gúla térfogatának 8-szorosa, felszíne pedig a téglacsúcson átmenő határlap t területének 8-szorosa. Jelöljük a szóban forgó gúlának a tégla AB, AD, AE éleivel párhuzamos éleinek hosszát j, k, l-lel, akkor térfogatát kétféle úton is kiszámíthatjuk: mint a merőleges élek hossza szorzatának a hatodát, és mint t-nek és a rá merőleges téglaátló felének 1/3-szoros szorzatát:

$$\frac{1}{6} jkl = \frac{1}{6} d \cdot t.$$

Így T térfogatára, V-re, ill. felszínére, F-re

$$V = \frac{8}{6} jkl = \frac{4}{3} jkl \qquad \text{és} \qquad F = 8t = 8\frac{jkl}{d},$$

tehát a kettő között a következő összefüggés áll fenn:

$$F = \frac{6V}{d}.$$

Elég tehát F és V egyikét meghatározni. V-t lesz könnyebb, illetőleg a kiszámításához szükséges j, k, l szakaszokat.

Jelöljük az A-t tartalmazó ternegyedbe eső gúla j hosszúságú élének O-tól különböző végpontját J-vel, az él metszéspontját az $ADHE$ lappal (e lap középpontját) O_1-gyel. Ekkor $OO_1 = a/2$, továbbá JA az OA-ra A-ban emelt merőleges sík egy egyenese, s így merőleges OA-ra. Az AJO és O_1AO derékszögű háromszögek hasonlók, mert O-nál levő hegyesszögük közös; így

$$\frac{j}{d/2} = \frac{OJ}{OA} = \frac{OA}{OO_1} = \frac{d/2}{a/2}, \qquad j = \frac{d^2}{2a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2a}.$$

Ugyanígy látható, hogy

$$k = \frac{d^2}{2b}, \qquad l = \frac{d^2}{2c}.$$

Így a keresett mennyiségek

$$V=\frac{4}{3}\cdot\frac{d^6}{8abc}=\frac{1}{6}\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{abc},$$
$$F=\frac{6V}{d}=\frac{d^5}{abc}=\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^5}{abc}.$$