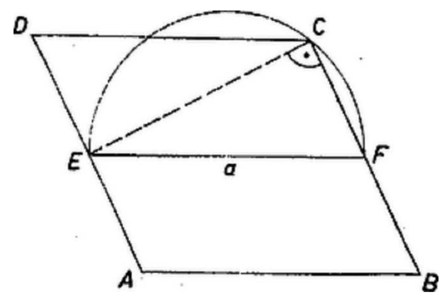
Megjegyzés: Egyenlő szárú trapézon olyant szokás érteni, amely szimmetrikus a párhuzamos oldalakra merőleges tengelyre nézve, és az alábbiakban mi is ezt fogjuk érteni rajta. Az elnevezés jelentése szerint minden paralelogramma is trapéz egyenlő szárakkal (és egyenlő párhuzamos oldalakkal). Így ha $a = b$, és a paralelogrammákat is tekintetbe vesszük, akkor egy a hosszúságú EF szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkör bármely pontjából mint egyik csúcsból rajzolva olyan paralelogrammát, amelyiknek EF középvonala, a feltételeknek megfelelő, „egyenlő szárú trapéz"-t kapunk, a terület tehát határozatlan. Így csak érdektelen eseteket zártunk ki. Az $a = b$ esetet is kizárhatjuk, mert ebben az esetben az elfogadott értelmezés mellett trapézunk téglalap, és így mindegyik oldal felezőpontjának vetülete a szemben levő oldalon annak a felezőpontja.



1. ábra

I. megoldás. Ha a-t és b-t ismerjük, akkor elég a magasság meghatározása a terület kiszámításához. Ehhez tájékozódunk először a trapéz alakjáról. Legyen a DA szár felezőpontja E, vetülete a BC száron a C csúcs. Ekkor E a BCD szögtartomány belsejében van, s így

$$DCB\sphericalangle > ECB\sphericalangle = 90^\circ,$$

tehát C-nél és a szimmetria folytán D-nél is tompa szög van. Így, ha $a > b$, akkor $AB = a$, $CD = b$.

Tükrözzük a CDE háromszöget az E pontra. Ekkor a D pont A-ba kerül, C pedig a CE és BA szakaszok meghosszabbításainak C' metszéspontjába. Így a trapéz t területe egyenlő a BCC' derékszögű háromszögével. Jelöljük a C pont vetületét AB-n M-mel és CM-et m-mel, így

$$t = \frac{BC' \cdot m}{2},$$

és, felhasználva a derékszögű háromszög magasságának mértani közép tulajdonságát,

$$m^2 = BM \cdot C'M, \quad \text{ahol} \quad BC' = a + b.$$

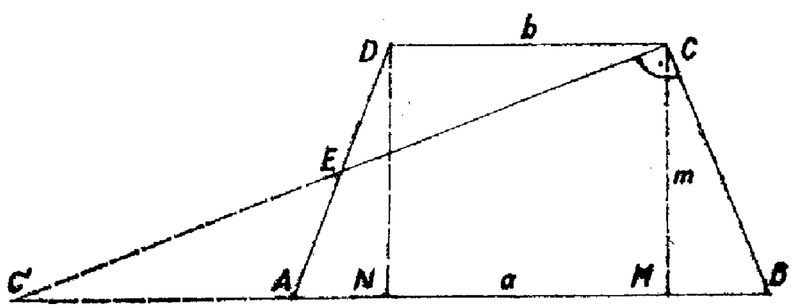
BM meghatározására tekintsük a D pont N vetületét is az AB oldalon. Egyrészt $MN = b$, másrészt a szimmetria miatt $AN = BM$ és mivel a kettő együtt a párhuzamos oldalak különbségét adja, így

$$BM = \frac{a-b}{2}, \quad C'M = a + b - \frac{a-b}{2} = \frac{a+3b}{2},$$

$$m = \frac{\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2},$$

és a trapéz területe

$$t = \frac{(a+b)\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{4}.$$

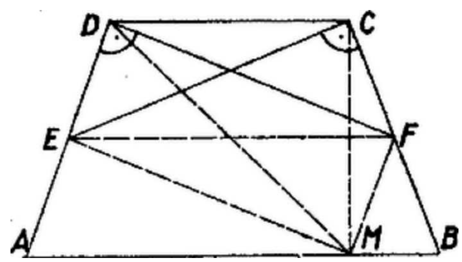


2. ábra

II. megoldás. Az m magasság meghatározására vegyük figyelembe, hogy a trapéz szimmetriája folytán a BC szár F felezőpontjának az AD száron a vetülete a D csúcs, a CEF és DFE derékszögű háromszögek egybevágók. Tükrözzük a CEF háromszöget EF-re. Mivel a középvonal AB-től és CD-től egyenlő távol fut, velük párhuzamosan, így C tükörképe az AB-n levő M vetülete. A $DEMF$ négyszög szemben fekvő oldalai egyenlők, így a négyszög paralelogramma, éspedig téglalap, mert D-nél (és M-nél) levő szögéről tudjuk, hogy derékszög. Ennek folytán átlói egyenlők: $DM = EF = (a+b)/2$, és a CDM derékszögű háromszögből

$$m^2 = CM^2 = DM^2 - CD^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - b^2 = \frac{(a+3b)(a-b)}{4}.$$

Megjegyzés: Több más út is választható m meghatározására, vagy kiszámíthatjuk a BC szár hosszát és annak ismeretében az I. megoldásban szereplő BCC' háromszög CC' befogóját, a területet pedig a $t = BC \cdot CC'/2$ összefüggésből. A fenti két számítás látszik még legegyszerűbbnek.



3. ábra