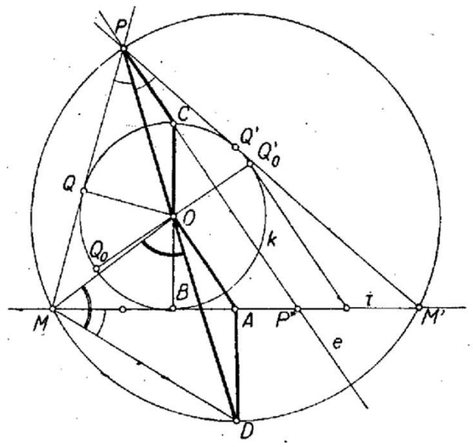
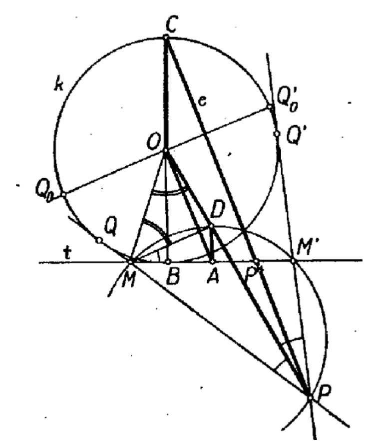
I. megoldás. Azt fogjuk megmutatni, hogy az M pont minden helyzeténél a PC egyenes párhuzamos OA-val, ehhez azonban előbb megvizsgáljuk a P pont lehetséges helyzeteit a körhöz és t-hez viszonyítva.

Van az M, M' pontpárnak egy olyan helyzete, amelyben a k-hoz húzott második érintők párhuzamosak. Ezt a pontpárt úgy kaphatjuk meg, hogy k-nak az AO-ra merőleges átmérője végpontjaiban, (Q_0, Q_0'-ben) húzunk érintőket. Ezek A-ra szimmetrikus pontpárt metszenek ki t-ből, mert OA a köztük levő sáv középvonala. Ha M, M' a sávon kívül van, akkor Q, Q' a C-t tartalmazó Q_0, Q_0' félkörön van, így a második érintők metszik egymást, még pedig t-nek azon a partján, amelyiken k van; így k a PMM' háromszögnek beírt köre (4. ábra).



4. ábra

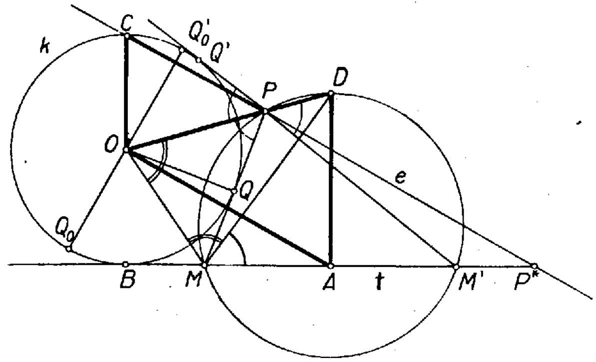


5. ábra

Ha M, M' a két párhuzamos közt van, akkor Q, Q' a B-t tartalmazó Q_0, Q_0' félkörön van, így most is metszik egymást az érintők. Ha az M, M' pontpár közrefogja B-t, akkor Q és Q' is közrefogja B-t a félkörön. Ekkor P a t érintő ellenkező partján keletkezik, mint k, és k a PMM' háromszög MM' oldalához hozzáírt kör (5. ábra).

Ha M és M' egyike B-be esik, és ez különbözik A-tól, akkor ebből a pontból nem húzható t-től különböző érintő, viszont tekinthetjük a második érintőnek is t-t. A másik pont ekkor B-nek A-ra vonatkozó tükörképe, és ez a két második érintő metszéspontja is, tehát a mértani helynek az M és M' mondott helyzetéhez tartozó pontja is.

Ha végül az M és M' pontok egyike A és B közé esik, akkor P a másik pontból húzott érintőnek az érintkezési pont és a t egyenes közé eső szakaszán keletkezik. Ekkor k a PMM' háromszög egyik olyan hozzáírt köre, amelyik az MM' oldal meghosszabbítását érinti (6. ábra).



6. ábra

Ha A egybeesik B-vel, akkor k is, t is, az M, M' pontpár is, így a belőlük húzott érintőpár is tükrös a BC egyenesre, tehát a P pont ezen az egyenesen van. Az egyenes bármely a körön kívüli pontjából két szimmetrikus érintő húzható k-hoz, ezek szimmetrikus M, M' pontpárt metszenek ki t-ből, amiből kiindulva éppen a kiszemelt P pontot kapjuk meg. A B és C pontban csak egy-egy érintő húzható k-hoz; az utóbbi nem metszi t-t, az előbbi viszont éppen t, így nem adható meg olyan pontpár, amelyikből kiindulva B-t vagy C-t kapnánk a mértani hely pontjaiként. Ebben az esetben tehát a BC egyenes k-n kívüli két félegyenese a keresett mértani hely. (A PC és OA egyenes ebben az esetben egybeesik, ami megfelel állításunknak.)

Tegyük fel a továbbiakban, hogy A és B különböző.

Nyilvánvaló, hogy M és M' felcserélésével ismét A-ra tükrös pontpárt kapunk, a hozzájuk tartozó P pont pedig nem változik. Így elegendő azokat a P pontokat vizsgálni, amelyek az A-ból B-n át húzott félegyenesen levő M pontokhoz tartoznak; hiszen ha M a másik félegyenesen fut végig, akkor P az előbbi M pontokhoz tartozó mértani helyet futja be mégegyszer.

Térjünk most állításunk bizonyítására. Az O pont a PMM' háromszög P-ből induló belső vagy külső szögfelezőjén van, aszerint hogy k az MM' szakaszt érinti, vagy annak meghosszabbítását. Jelöljük a kérdéses szögfelező és a PMM' háromszög köré írt kör metszéspontját D-vel. A belső szögfelező metszéspontja a P-t nem tartalmazó MM' ív felezőpontja, mivel pedig a belső és külső szögfelező egymásra merőleges, így P és a két szögfelező k-val való metszéspontja derékszögű háromszöget alkot. Ennek átfogója a körnek átmérője. Így a külső szögfelező a körülírt kört a belső szögfelező metszéspontjával árellenes pontban, vagyis a P-t tartalmazó MM' ív felezőpontjában metszi. Bármelyik pontból bocsátunk is merőlegest MM'-re, az azt felezőpontjában, A-ban metszi.

Állításunkat úgy bizonyítjuk, hogy megmutatjuk mindegyik esetben a COP és ADO háromszögek hasonlóságát. Könnyű látni, hogy az OPQ és DMA derékszögű háromszögek hasonlók. Valóban, ha O a P-nél levő belső szög felezőjén van, akkor a kerületi szögek összefüggését felhasználva

$$DMA\sphericalangle = DMM'\sphericalangle = DPM'\sphericalangle = DPM\sphericalangle = OPQ\sphericalangle.$$

Ha pedig O a külső szögfelezőn van, akkor

$$DMA\sphericalangle = DMM'\sphericalangle = DPM'\sphericalangle = OPQ'\sphericalangle = OPQ\sphericalangle.$$

Az OPQ és DMA háromszög szögei tehát mindkét esetben megegyeznek s így

$$\frac{PO}{OQ} = \frac{MD}{DA}. \tag{1}$$

Itt OQ, mint körsugár, egyenlő OC-vel, állításunk igazolásához így szükségünk van annak a megmutatására, hogy $DO = DM$.

Ha k a PMM' háromszög beírt köre, akkor MO is a háromszög belső szögfelezője, s így, mint az MOP háromszög külső szöge

$$MOD\sphericalangle = OPM\sphericalangle + OMP\sphericalangle = DMM'\sphericalangle + OMM'\sphericalangle = DMO\sphericalangle.$$

Ha k az MM' oldalhoz hozzáírt kör, akkor MO a PMM' háromszög külső szögét felezi, s így ismét az MOP háromszögből indulva ki

$$\begin{aligned} MOD\sphericalangle = 180^\circ - (OPM\sphericalangle + OMP\sphericalangle) = 180^\circ - (OPM\sphericalangle + M'MP\sphericalangle +\\ + OMM'\sphericalangle) = 180^\circ - (DMM'\sphericalangle + M'MP\sphericalangle + OMQ\sphericalangle) = DMO\sphericalangle. \end{aligned}$$

Ha k a PMM' háromszög PM oldalához hozzáírt kör, akkor PO is, MO is a háromszög megfelelő külső szögét felezi, s így ismét az MOP háromszögből indulva ki

$$\begin{aligned} MOD\sphericalangle = 180^\circ - (OPM\sphericalangle + OMP\sphericalangle) = 180^\circ - (DMM'\sphericalangle + OMB\sphericalangle) =\\ = DMO\sphericalangle. \end{aligned}$$

Eszerint az ODM háromszög OD-vel és DM-mel szemben levő szögei mindhárom esetben egyenlők, s így valóban $OD = DM$. Ezt, továbbá az említett $OQ = OC$ egyenlőséget felhasználva (1)-ből

$$\frac{PO}{OC} = \frac{OD}{DA}.$$

Az ADO és COP háromszögek itt szereplő oldalai párhuzamosak. Az első esetben D a t egyenes ellenkező partján van, mint k, s így DA és OB ellenkező irányban, DA és OC pedig egy irányban párhuzamos, DO és OP szintén.

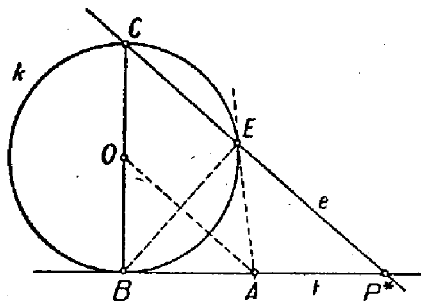
A második és harmadik esetben D és k a t egyenes egy partján van, így DA és OC ellenkező irányban párhuzamos. Másrészt D a második esetben az OP szakaszon van, a harmadik esetben a szakasz P-n túli meghosszabbításán, így OD és PO is ellenkező irányban párhuzamosak. Ennek folytán az ADO és COP háromszög mindhárom esetben hasonló, mert két oldaluk aránya és a köztük levő szög megegyezik, és hasonló helyzetű is. Így a harmadik oldalpár is párhuzamos:

$$PC \parallel OA.$$

Eszerint P mindig a C ponton át az (M ponttól független) OA egyenessel párhuzamos e egyenesen van. Nyilván nem lehet az egyenes k körbe eső húrján.

Ha P az e egyenes egy a körön kívüli és nem a t-n levő pontja, akkor húzzuk meg belőle az egyik érintőt k-hoz és tükrözzük ennek t-vel való metszéspontját A-ra. Az így kapott pontpárt választva M, M'-nek, az ezekből húzott érintők metszik egymást, mert csak az OA-val (s így e-vel is) párhuzamos érintőpár nem metszi egymást. A metszéspont egyrészt a bizonyítottak szerint e-n van, másrészt a meghúzott érintőn, tehát a kiválasztott P pont.

Legyen e metszéspontja t-vel P^* (7. ábra), ekkor OA párhuzamos a BCP^* háromszög CP^* oldalával és a BC oldal O felezőpontjából indul ki, tehát a háromszög középvonala; így A felezi a BP^* szakaszt, vagyis P^* a B pont tükörképe A-ra, de ekkor, mint a megoldás elején láttuk, a mértani hely B, P^* pontpárhoz tartozó pontja P^*.



7. ábra

Vizsgáljuk meg végül e metszéspontjait k-val. A C-ben húzott érintő párhuzamos t-vel, nem keletkezhet tehát annak semelyik pontjából húzott érintőként, és nem megy át rajta a kör más pontjához húzott érintő sem. Így C nem tartozik a mértani helyhez.

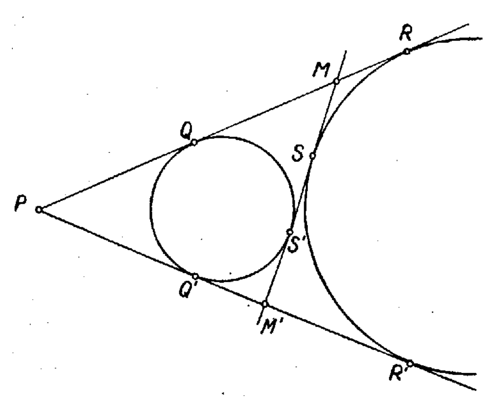
A másik E metszéspont nem más, mint az A-ból k-hoz húzott második érintő érintési pontja, ugyanis AO-ra tükrözve B-t a tükörkép egyrészt k-n van, mert annak középpontján átmenő egyenesre tükröztünk, másrészt e-n, mert egy háromszög egy csúcsát a szemközti oldallal párhuzamos középvonalra tükrözve a tükörkép a szemközti oldalán van. Így B tükörképe csak E lehet, és AE az AB egyenes tükörképe, tehát érinti a k kört.

Eszerint az E-ben húzott érintő A-ban metszi t-t. Ez a pont saját tükörképe, egybeeső M, M' pontpárt kapunk, a belőlük húzott második érintők is egybeesnek, tehát nincs meghatározott metszéspontjuk, s így E nem tartozik a mértani helyhez.

A keresett mértani hely tehát a C-n át AO-val párhuzamosan húzott (vagy C-n és az A-ból húzott érintő E érintési pontján át, vagy C-n és a B pont A-ra vonatkozó P^* tükörképén át húzott) egyenesnek a k-n kívül eső két félegyeneséből áll.

II. megoldás. A P pont lehetséges helyzeteire vonatkozó megállapításokat nem ismételjük meg és csak azt az esetet vizsgáljuk, ha $A \neq B$. Legyen D a B pont tükörképe A-ra. Azt fogjuk megmutatni, hogy P mindig a CD egyenesen van, mégpedig úgy, hogy először belátjuk, hogy ha k a PMM' háromszög beírt köre, akkor D az MM' oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja, ha k az MM' oldalhoz hozzáírt kör, akkor D a beírt kör érintési pontja, ha pedig k az MP oldalhoz hozzáírt kör, akkor D az $M'P$ oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja. Jelöljük a második kört mindhárom esetben k^*-gal, középpontját O^*-gal.

Az első két esetben a P-ből induló oldalak k és k^* közös külső érintői, MM' pedig az egyik közös belső érintő, a harmadik esetben pedig a P-n átmenő érintők a közös belső érintők, MM' pedig az egyik külső közös érintő. Állításunk ennek folytán úgy fogalmazható, hogy két kör egy közös külső érintőjén az érintési pontok közti szakasz, és a belső érintők metszéspontjai közti szakasz felezőpontja közös, és hasonlóan egy belső közös érintőn az érintési pontok és a külső közös érintők metszéspontja közti szakasz középpontja szintén azonos. Ezt fogjuk először bizonyítani.



8. ábra

Legyen tehát két kör két közös külső érintőjének metszéspontja P, az egyik érintő érintse a köröket Q, ill. R pontban, a másik Q', ill. R'-ben (8. ábra). Egy közös belső érintő messe az előbbit egy M pontban, az utóbbit M'-ben, és legyen az M-hez közelebbi érintési pont S, a másik S'. Ekkor az egy pontból egy körhöz húzható érintők egyenlősége folytán

$$PR = PQ + QM + MR = PQ + S'M + SM = PQ + MM' + SM - M'S',$$

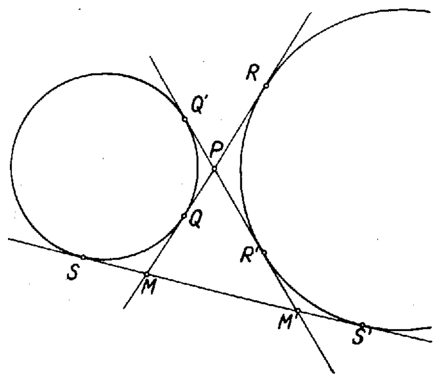
és hasonlóan

$$PR' = PQ' + Q'M' + M'R' = PQ' + M'S' + M'S = \\ = PQ' + MM' - MS + M'S'.$$

Mivel még $PR = PR'$ és $PQ = PQ'$, így kell, hogy

$$MS - M'S' = M'S' - MS,$$

amiből $MS = M'S'$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az MM' és SS'szakaszok felezőpontja egybeesik.



9. ábra

Hasonló jelöléseket használva két közös belső érintő esetén (9. ábra)

$$PR = MR - PQ - QM = MS' - PQ - MS = MM' - PQ + M'S' - MS,$$

és hasonlóan

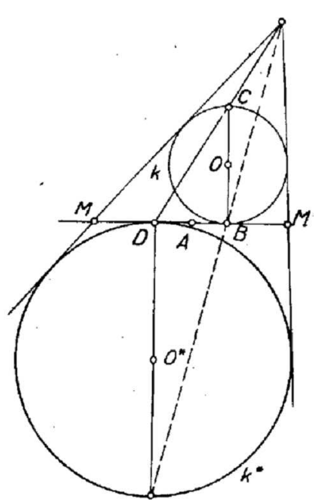
$$PR' = Q'M' - PQ' - R'M' = SM' - PQ' - M'S' = MM' - PQ' + SM - M'S'.$$

A két összefüggésből, mivel $PR = PR'$, $PQ = PQ'$, így ismét következik, hogy $MS = M'S'$, s így az MM' és SS' szakaszok felezőpontja ez esetben is egybeesik.

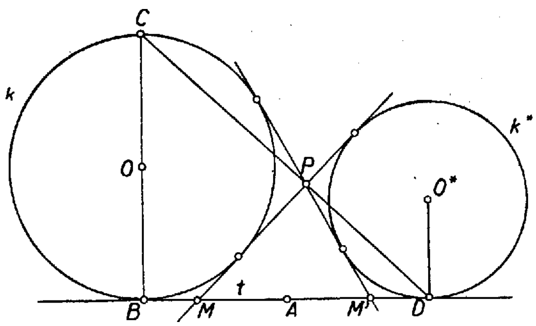
Ez feladatunkra alkalmazva valóban azt adja, hogy mind a három esetben k és k^* körök B és D érintési pontjai egymás tükörképei az MM' szakasz A felezőpontjára nézve, és ezt akartuk belátni.

P az első két esetben k és k^* külső hasonlósági pontja, a harmadik esetben pedig belső hasonlósági pontjuk, így következik, hogy P, C és D egy egyenesen vannak, ha belátjuk, hogy a mondott P középpontú hasonlóságoknál a C és D pont mindig megfelelő pontok.

Az első és második esetben k és k^* t különböző oldalán van (10. ábra), így OB, O^*D ellenkező irányban merőlegesek t-re, OC és O^*D tehát egyirányú párhuzamos sugarak, így a külső hasonlósági pontra nézve C és D a két kör egymásnak megfelelő pontjai.



10. ábra



11. ábra

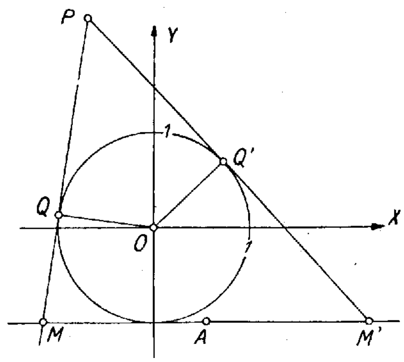
A harmadik esetben k és k^* t-nek ugyanazon az oldalán van (11. ábra), így OB és O^*D egy irányban, OC és O^*D tehát ellenkező irányban párhuzamosak. P most belső hasonlósági pont, erre nézve C és D ismét egymásnak megfelelő pontok. Ezzel bebizonyítottuk, hogy C, D és P mindig egy egyenesen van, vagyis, mivel a C és D pontok nem változnak M-mel, a mértani hely pontjai a CD egyenesen vannak.

Az, hogy ennek az egyenesnek mely pontjai tartoznak a mértani helyhez, az előbbi megoldáshoz teljesen hasonlóan tárgyalható. Ezt itt nem ismételjük meg.

A versenyzők legtöbbje a koordinátageometria módszereivel kereste a mértani helyet. Bemutatunk egy ilyen megoldást.

III. megoldás. Válasszuk origónak a k kör O középpontját, távolságegységének a sugarát, és az X-tengely legyen párhuzamos t-vel úgy, hogy t a $(0,-1)$ pontban érintse k-t. Jelöljük A abszcisszáját a-val, tehát A az $(a,-1)$ pont (12. ábra). Az M és M' pontok a t-n vannak, tehát $(z,-1)$, ill. $(z',-1)$ alakúak a koordinátáik. Mivel a köztük levő szakasz felezőpontja A, így

(1) $$z+z'=2a.$$



12. ábra

Az M, ill. M' pontból húzott érintő érintse a kört a Q (u,v), ill. $Q'(u',v')$ pontban. Ekkor

(2) $$u^2+v^2=u'^2+v'^2=1,$$

mert a pontok a körön vannak. Az OQ sugár iránytangense v/u (ha $u\neq 0$), így a Q-n át OQ-ra merőlegesen haladó egyenes egyenlete (ha $v\neq 0$)

$$y-v=-\frac{u}{v}(x-u),\quad \text{vagy}\quad ux+vy=u^2+v^2=1.$$

Az egyenlet megadja a Q-n átmenő érintőt az $u=0$ ($v=1$, vagy $v=-1$) és a $v=0$ ($u=1$, vagy $u=-1$) esetben is.

Ez az érintő átmegy M-en, tehát

$$uz-v=1,\qquad v=uz-1,$$

és ezt (2)-be írva

$$u^2+(uz-1)^2=1,\quad u\big[(1+z^2)u-2z\big]=0.$$

Hagyjuk egyelőre figyelmen kívül az $u=0$ esetet, ekkor

$$u=\frac{2z}{1+z^2},\ \text{így}\ v=uz-1=\frac{z^2-1}{z^2+1},$$

és az M pontból húzott érintő egyenlete így írható:

(3) $$2zx+(z^2-1)y=z^2+1.$$

Hasonlóan az M' ponton átmenő érintő egyenlete:

$$2z'x + (z'^2 - 1)y = z'^2 + 1. \tag{3a}$$

A P metszéspont x_P, y_P koordinátáit kiszámíthatjuk pl. úgy, hogy az első egyenlet z'-szöröséből levonjuk a második z-szeresét:

$$\begin{gathered}\big[z'(z^2-1) - z(z'^2-1)\big]y_P = z'(z^2+1) - z(z'^2+1),\\ (z-z')\big[(zz'+1)y_P - zz' + 1\big] = 0.\end{gathered}$$

Ismét hagyjuk figyelmen kívül egyelőre a $z = z'$ esetet (amikor M és M' egybeesik, s így megegyezik A-val), ekkor, amennyiben $zz' \neq -1$,

$$y_P = \frac{zz'-1}{zz'+1}, \tag{4}$$

és ha $z \neq 0$, akkor pl. az M-ből húzott érintő egyenletéből

$$x_P = \frac{z^2+1}{2z} - \frac{z^2-1}{2z}\cdot\frac{zz'-1}{zz'+1} = \frac{z+z'}{zz'+1} = \frac{2a}{zz'+1}. \tag{5}$$

(Felhasználtuk az (1) összefüggést.) Az utóbbi egyenletből, ha $x_P \neq 0$

$$zz' = \frac{2a}{x_P} - 1, \tag{6}$$

és ezt y_P kifejezésbe beírva

$$y_P = \frac{\dfrac{2a}{x_P} - 2}{\dfrac{2a}{x_P}} = 1 - \frac{x_P}{a}, \text{ vagy } x_P + ay_P = a.$$

A keresett mértani hely pontjai tehát az

$$x + ay = a \tag{7}$$

egyenesen vannak, eltekintve esetleg a figyelmen kívül hagyott esetekhez tartozó pontoktól.

Vizsgáljuk meg, hogy (7) mely pontjai keletkeznek mint alkalmas M és M' pontokból húzott érintők metszéspontjai. Ezek azok a pontok, amelyek koordinátái alkalmas z és z' (valós) számokkal (4), (5) alakban írhatók. Az ilyen z (és (1) szerint neki megfelelő z') értéket az M-ből húzott érintő (3) egyenletéből számíthatjuk ki. Azt z szerint rendezve

$$(y-1)z^2 + 2xz - y - 1 = 0.$$

Innen

$$z = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2-1}}{y-1},$$

tehát azokhoz az x, y értékpárokhoz, az egyenesnek azokhoz a pontjaihoz tartozik ilyen z érték, amelyekre

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0,$$

vagyis amelyek nincsenek a k körben, és amelyekre $y \neq 1$, tehát a körrel való $(0,1)$ metszéspontot is figyelmen kívül kell hagynunk. A második metszéspontra $x^2 + y^2 - 1 = 0$, de $y \neq 1$, így, felhasználva (7)-et

$$z = \frac{-x}{y-1} = a,$$

ekkor (1)-ből $z' = a$. Az M és M' pont tehát egybeesik (és azonos A-val), így nincs a belőlük húzott érintőknek meghatározott metszéspontja. Ez a pont sem tartozik tehát a mértani helyhez. Ezzel a korábban kizárt $z = z'$ esetet is elintéztük, mert (1) szerint ekkor közös értékük csak a lehet.

Meg kell még vizsgálnunk a korábban a tárgyalásból kizárt eseteket, hogy tartozik-e azokhoz és milyen pontja a mértani helynek. Természetesen minden kizárt esettel együtt az M helyett M'-re vonatkozó megfelelő esetet is tárgyalni kell, ez azonban a két pont szimmetrikus szerepe miatt nem fog külön feladatot jelenteni.

Korábban figyelmen kívül hagytuk az $x = 0$ értéket. A (7) egyenes ehhez tartozó pontjának ordinátája $y = 1$, és éppen láttuk, hogy ez sem tartozik a mértani helyhez.

Kizártuk azt, hogy az M (vagy M') pontból húzott érintő érintési pontjának u (vagy u') abszcisszája 0 legyen. Ebben az esetben az érintési pont csak $(0,1)$ vagy $(0,-1)$ lehet. Az előbbi eshetőséget már éppen kizártuk.

Az M-ből és M'-ből húzott „második”, azaz t-től különböző érintő viszont a $(0,-1)$-től különböző pontban érinti k-t, kivéve, ha M (ill. M') éppen a $(0,-1)$ pont. Ekkor tekinthetjük „második” érintőnek is a t egyenest. Mivel ekkor z (vagy z') 0, (1) miatta másik pont a $(2a,-1)$ pont, és a két érintő metszéspontja is ez a pont, ami a (7) egyenes metszéspontja t-vel. Ezt tehát a mértani helyhez tartozónak tekinthetjük. Ezzel egyszersmind a $z=0$ és $z'=0$ esetet is megtárgyaltuk.

Kizártuk végül korábban a $zz'=-1$ esetet. Ekkor pl. az M-ből húzott érintő (3) egyenletét 0-ra redukálva és z'^2-tel szorozva

$$2zz'^2x+\left[(zz')^2-z'^2\right]y-(zz')^2-z'^2=-2z'z-(z'^2-1)y-1-z'^2=0.$$

Ez párhuzamos a másik érintővel, melynek $(3a)$ egyenlete

$$2z'x+(z'^2-1)y-1-z'^2=0$$

alakban írható, de különbözik attól, tehát az ilyen z, z' értékpárhoz nem tartozik metszéspont.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a keresett mértani hely az $x+ay-a=0$ egyenesnek a körön kívül eső két félegyenese, ami nem más, mint az A-ból húzott érintő érintési pontját és a t érintési pontjával átellenes pontot összekötő húrnak a körön kívüli meghosszabbítása mindkét irányban.

Megjegyzések. 1. A $zz'=-1$ esetben (1)-ből $z(2a-z)=-1$, azaz $z^2=2az+1$, és így az M-ből húzott érintő egyenlete ilyen alakban írható:

$$2zx+2azy=2az+2, \quad x+ay=a+\frac{1}{z}.$$

Ez párhuzamos a mértani hellyel. A föntiek szerint ugyanez áll az M'-ből húzott érintőre is.

2. A két érintő egyenletéből még egyszerűbben jutunk a mértani hely egyenletéhez, ha a két érintő 0-ra redukált egyenletének különbségét képezzük és felhasználjuk (1)-et:

$$\begin{aligned}0&=2zx+(z^2-1)y-1-z^2-\left[2z'x+(z'^2-1)y-1-z'^2\right]=\\&=2(z-z')x+(z^2-z'^2)y-(z^2-z'^2)=\\&=(z-z')\big(2x+(z+z')y-(z+z')\big)=2(z-z')(x+ay-a).\end{aligned}$$

Ha az (x,y) pont rajta van mind a két érintőn, akkor kielégíti az utolsó egyenletet és ha $z\neq z'$, akkor (7)-et is. Azt a z értéket, amely egy adott (x,y) ponthoz vezet, most is ugyanúgy kereshetjük meg, mint az előbb.

3. Sok versenyző nem kereste a számítások lehetőleg egyszerű útját, és így nem maradt kellő ideje terve teljes végrehajtására.