I. Ha x_0, y_0 megoldása (1)-nek, akkor az első tagból levonva ab-t, a másodikhoz hozzáadva

$$n = ax_0 - ab + by_0 + ab = a(x_0 - b) + b(y_0 + a)$$

is teljesül, vagyis $x_0 - b$, $y_0 + a$ is megoldás, és általában, ha t tetszés szerinti egész szám, akkor

$$a(x_0 - tb) + b(y_0 + ta) = n$$

is fennáll. Ha tehát van egy x_0, y_0 megoldásunk, akkor választhatjuk t-t úgy, hogy x_0 helyébe a lehető legkisebb nem negatív érték kerüljön: mindig választható t úgy, hogy $x_1 = x_0 - tb$ 0 és $b - 1$ közt legyen (ha nem lett volna már x_0 ilyen; utóbbi esetben $t = 0$ választható).

Ha x_0, y_0 nem negatív, akkor $y_1 = y_0 + ta$ sem negatív, mert $a > 0$ és ha

$$x_1 \geq 0 \text{ és } b > 0, \text{ akkor } t \geq 0.$$

Elegendő tehát azokat az értékeket vizsgálni, amelyeket $ax + by$ az $x = 0, 1, \dots, b - 1$ értékek és tetszés szerinti nem negatív egész y-ra vesz fel. Amely n számok ezek közt nem szerepelnek, azokra nem oldható meg az (1) egyenlet.

II. Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, ha a és b relatív prímek. Az általános esetet nem lesz nehéz erre visszavezetni. Ekkor a következő táblázatban szerepelnek azok az n értékek, amelyekre (1) megoldható:

$$\begin{array}{lrrrrlrl}
 & 0, & b, & 2b, & 3b, & \dots, & jb, & \dots \\
(2) & a, & a+b, & a+2b, & a+3b, & \dots, & a+jb, & \dots \\
 & 2a, & 2a+b, & 2a+2b, & 2a+3b, & \dots, & 2a+jb, & \dots \\
 & 3a, & 3a+b, & 3a+2b, & 3a+3b, & \dots, & 3a+jb, & \dots \\
 & . & . & . & . & \dots & . & \dots \\
 & (b-1)a, & (b-1)a+b, & (b-1)a+2b, & (b-1)a+3b, & \dots & (b-1)a+jb, & \dots
\end{array}$$

Egy-egy sorban b különbségű számtani sorozat áll, tehát bármely két szám különbsége osztható b-vel, és így két ugyanabban a sorban álló szám b-vel osztva ugyanazt a maradékot adja.

Megmutatjuk, hogy különböző sorokban álló számok viszont különböző maradékot adnak b-vel osztva. Egy sor számai ugyanazt a maradékot adják, mint pl. az első szám. Ha a k_1-edik és a k_2-edik sor számai ugyanazt a maradékot adnák, akkor kezdő számaik különbsége: $(k_1 - k_2)a$ osztható volna b-vel. Ez azonban nem lehet, ugyanis a és b relatív prímek, és ha egy szám egy szorzatnak osztója, de az egyik tényezőhöz relatív prím, akkor osztója a másik tényezőnek; $(k_1 - k_2)a$ tehát csak úgy lehetne b-vel osztható, ha $k_1 - k_2$ osztható volna b-vel. Azonban k_1 is, k_2 is kisebb b-nél és egyik sem negatív, így $|k_1 - k_2| < b$, tehát nem lehet b-vel osztható. Így k_1a és k_2a különböző maradékot ad b-vel osztva.

Mivel b sorunk van és b lehetséges maradékunk (a $0, 1, 2, \dots, b - 1$ számok), így minden maradék előfordul, és csak egyszer. Egy adott szám tehát legfeljebb egy sorban fordulhat elő és ott is csak egyszer, mert a sor egymás utáni számai állandóan nőnek.

Megállapításaink akkor is érvényben maradnak, ha a sorokat bal felé is folytatjuk b ismételt levonásával, hiszen az egyes sorokról csak annyit használtunk ki, hogy a szomszédos számok különbsége b.

Az így kiegészített táblázatban minden egész szám szerepel. Ha ugyanis n tetszés szerinti egész szám, és a k-adik sor az, amelynek a számai – köztük $(k - 1)a$ is – ugyanazt a maradékot adják, mint n, akkor $n - (k - 1)a$ osztható b-vel, tehát van olyan j egész szám, amelyre $n - (k - 1)a = bj$, $n = (k - 1)a + bj$. Így n a k-adik sornak a $(k - 1)a$-tól számított j-edik száma jobbra vagy balra j előjele szerint.

Mivel a sorokat balra folytatva mindegyikben elegendő lépés után csupa negatív szám áll (a-szori levonás után biztosan), így csak véges számú olyan pozitív egész n szám van, amelyikre nincs (1)-nek nem negatív egészekből álló megoldása, és ezek a táblázat kiegészítésekor, tehát az

$$\begin{array}{llrrrl}
 & & a-b, & a-2b, & a-3b, & \dots \\
(3) & & 2a-b, & 2a-2b, & 2a-3b, & \dots \\
 & . & . & . & . & \dots \\
 & & (b-1)a-b, & (b-1)a-2b, & (b-1)a-3b, & \dots
\end{array}$$

táblázatban fellépő pozitív számok.

III. Ha a és b nem relatív prímek, jelöljük legnagyobb közös osztójukat d-vel, és legyen $a = d \cdot a'$, $b = d \cdot b'$; itt a' és b' relatív prímek. Ekkor (2) minden száma többszöröse d-nek, mert $ax + by = d(a'x + b'y)$, tehát minden a d-vel nem osztható természetes szám hiányzik (2)-ből, és így megfelel a feladat követelményének.

Ha viszont $n = d \cdot n'$, akkor az $ax + by = n$ és $a'x + b'y = n'$ egyenletnek ugyanazok a számpárok a megoldásai. Így ha a', b'-ből kiindulva írjuk fel a (3)-nak megfelelő táblázatot, az abban fellépő pozitív számok d-szeresei felelnek meg d többszörösei közül a feladat feltételeinek. Ezek azonban éppen a (3) táblázatban fellépő pozitív számok.

Az (1) egyenletnek tehát akkor nincs nem negatív egészekből álló megoldása, ha n a (3) táblázatban fellépő valamelyik természetes szám, továbbá ha a és b legnagyobb közös osztójával nem osztható (ha e két szám nem relatív prím egymáshoz).

Megjegyzések. 1. Ha a és b relatív prímek egymáshoz, a feladat követelményének megfelelő legnagyobb természetes szám a (3) táblázat bal alsó sarkában álló $ab-a-b$ szám.

2. Könnyen látható az is, hogy ha $0 \le n \le ab-a-b$, akkor n és $ab-a-b-n$ közül az egyik kielégíti a feladat követelményeit, a másik nem. Valóban, egyrészt ha volnának olyan x_1, y_1, x_2, y_2 nem negatív egész számok, amelyekre

$$ax_1+by_1=n \qquad \text{és} \qquad ax_2+by_2=ab-a-b-n,$$

akkor

$$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)=ab-a-b$$

volna és x_1+x_2, y_1+y_2 nem negatív, holott éppen láttuk, hogy ennek az egyenletnek nincs nem negatív egészekből álló megoldása. Így legfeljebb az egyik egyenletnek van nem negatív megoldása.

Másrészt láttuk, hogy az (1) egyenletnek mindig van egész megoldása, és van olyan x_1, y_1, megoldása is, amelyben $0 \le x \le b-1$. Ha most az egyenletnek nincs nem negatív egészekből álló megoldása, akkor $y_1<0$. Ekkor

$$ab-a-b-n=a(b-1-x_1)+b(-1-y_1),$$

és itt $x_2=b-1-x_1 \ge 0$, $y_2=-1-y_1 \ge 0$ egy nem negatív egészekből álló megoldás.

3. A $0, 1, 2, \ldots, ab-a-b$ számoknak ezek szerint pontosan a fele elégíti ki a feladat követelményeit, tehát

$$\frac{ab-a-b+1}{2}=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

a megfelelő számok száma. (Ez mindig egész, mert ha a és b relatív prímek, akkor legalább az egyik páratlan.)