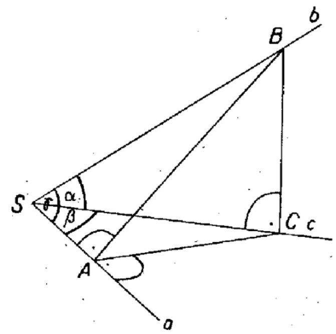
I. megoldás. Legyen az a félegyenes egy S-től különböző pontja A. Emeljünk a-ra az A pontban merőlegest a és c síkjában. Mivel α hegyesszög, ez metszi a c félegyenest egy C pontban. Hasonlóan c-re C pontjában merőlegest állítva c és b síkjában, ez metszi b-t egy B pontban (1. ábra).

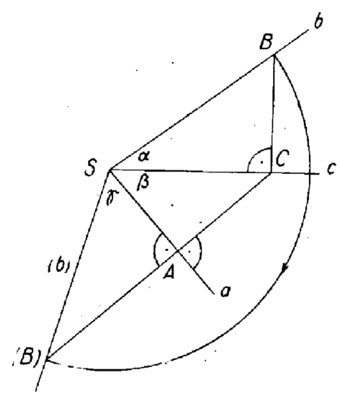


1. ábra

Az A, B, C-n átmenő Σ sík merőleges a-ra, ugyanis AC egyenese szerkesztés szerint merőleges a-ra, a CB egyenes pedig az SAC síkra merőleges SCB síkban van és merőleges a két sík SC metszésvonalára, így CB merőleges az SAC síkra, tehát annak minden egyenesére, így a-ra is. AC és CB tehát a Σ sík két a-ra merőleges egyenese, amelyek nem párhuzamosak. Így Σ merőleges a-ra, és az SAC szög mellett, ami szerkesztés szerint derékszög, derékszög az SAB szög is, és az ACB szög is, mert AC szára az SAC síkban van, CB pedig merőleges erre a síkra. Az SCB szög a szerkesztés szerint ugyancsak derékszög. A feladat feltételei szerint $BSC\sphericalangle = \alpha$, $CSA\sphericalangle = \beta$, és az $ASB\sphericalangle = \gamma$ szöget kell kiszámítanunk.

Most már az SBC, illetőleg SCA háromszögből $SC = SB\cos\alpha$, $SA = SC\cos\beta$, és így az SBA háromszögből

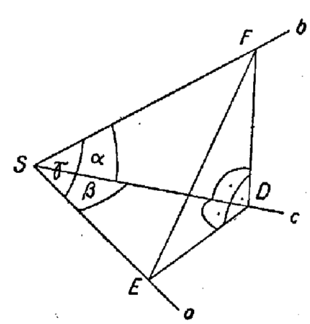
$$\cos\gamma = \cos ASB\sphericalangle = \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SB}\cos\beta = \cos\alpha\cos\beta.$$



2. ábra

Megjegyzés. A felhasznált összefüggéseket még világosabbá tehetjük ábrázoló geometriai meggondolással. Tekintsük az a, c síkot első képsíknak, a b, c síkot második képsíknak, ekkor c a képsíkrendszer tengelyében van. A képsíkoknak az a, ill. b félegyenest tartalmazó félsíkjait, vegyük pozitívnak. Az a és b félegyenesekkel meghatározott síkot a – mint a sík első nyomegyenese – körül az első képsíkba leforgatva a 2. ábrát kapjuk, ezen mindhárom felhasznált derékszögű háromszög valódi nagyságban látható. (B)-et – különbségi háromszög mellőzésével – kimetszhetjük a C-n át a-ra állított merőlegesből az $SB = S(B)$ egyenlőség alapján, ugyanis az SB szakasz mind a második képsíkon, mind a leforgatásban valódi nagyságban látszik.

A legtöbb versenyző több trigonometriai ismeret felhasználásával – de viszont kevesebb diszkusszióval – végezte el a számítást. Ilyen a következő



3. ábra

II. megoldás. Legyen a c félegyenes egy S-től különböző pontja D, és emeljünk c-re merőlegest mind az a, c, mind a b, c síkban. Mivel α és β hegyesszögek, ezek metszik a-t E-ben, ill. b-t F-ben (3. ábra). Az EDF szög az SDE és SDF síkok hajlásszöge, tehát a DEF háromszögben D-nél derékszög van, továbbá az SED és SFD háromszögek is derékszögűek. A keresett γ szöget tartalmazó SEF háromszög mindhárom oldalát kifejezhetjük SD-vel és az ismert szögekkel:

$$SE = \frac{SD}{\cos\alpha}, \quad SF = \frac{SD}{\cos\beta},$$

továbbá $DE = SD \operatorname{tg}\beta$, $DF = SD \operatorname{tg}\alpha$,
és így

$$EF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = SD\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}.$$

Ezekkel a koszinusz-tétel alapján

$$\cos\gamma = \cos ESF\sphericalangle = \frac{SE^2 + SF^2 - EF^2}{2SE \cdot SF}.$$

A számláló jól ismert azonosságok felhasználásával így alakítható:

$$SE^2 + SF^2 - EF^2 = SD^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta\right) =$$
$$= SD^2\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{\sin^2\beta + \cos^2\beta}{\cos^2\beta} - \operatorname{tg}^2\beta\right) = 2SD^2,$$

tehát

$$\cos\gamma = 2SD^2 : \frac{2SD^2}{\cos\alpha\cos\beta} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Megjegyzés. Több versenyző rámutatott, hogy hasonlóan számíthatjuk γ-t akkor is, ha az a, c és b, c félegyenes-párokkal meghatározott síkok szöge tetszés szerinti ε szög. Az EDF szög éppen ezt a lapszöget méri, tehát

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF\cos\varepsilon,$$

és így $DE/SE = \sin\beta$, $DF/SF = \sin\alpha$ figyelembevételével

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varepsilon.$$

Ezt az összefüggést a gömbháromszögtan *oldal-koszinusz-tételének* szokás nevezni; érvényességének feltételeivel itt tovább nem foglalkozunk.