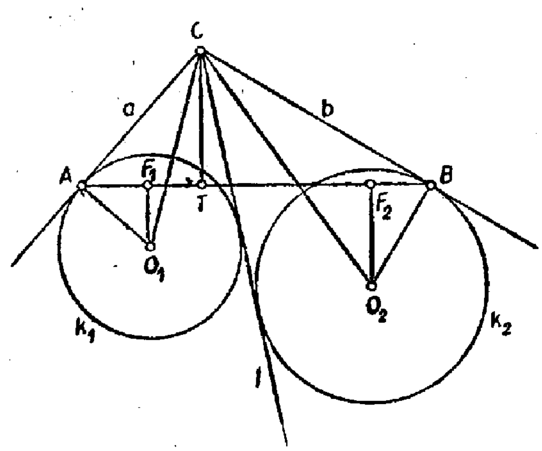
Az a és b félegyenesek közös kezdőpontját jelöljük C-vel, a két kör középpontját O_1-gyel és O_2-vel, e három pont vetületét az AB egyenesen T-vel, F_1-gyel és F_2-vel. A vizsgálandó húrok egyenlősége helyett nyilván elegendő a felüknek, AF_1-nek és BF_2-nek az egyenlőségét kimutatni.



1. ábra

Ha O_1 nem esik az AB egyenesre (azaz $BAC\sphericalangle \neq 90°$, akkor az AO_1F_1 és a CAT derékszögű háromszögekben az A-nál, illetőleg C-nél levő szögek merőleges szárú hegyes szögek, ezért egyenlők, s így a két háromszög hasonló, tehát megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$AF_1 : AO_1 = CT : CA,$$

ebből

$$AF_1 = \frac{AO_1}{CA} \cdot CT. \tag{1}$$

Ugyanígy a BO_2F_2 és CBT háromszögek hasonlósága alapján (hacsak $ABC\sphericalangle \neq 90°$)

$$BF_2 = \frac{BO_2}{CB} \cdot CT. \tag{2}$$

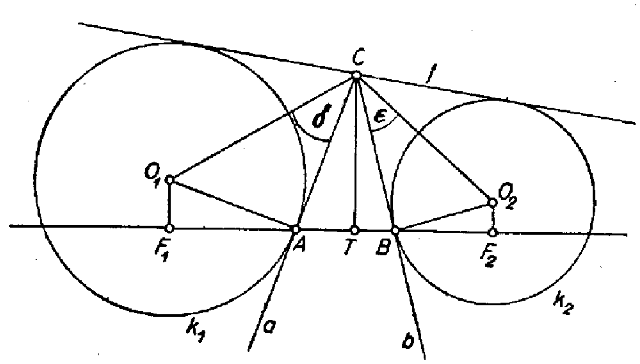
Az állítás igazolásához most már elegendő az AO_1/CA és BO_2/CB arányok egyenlőségét belátnunk. Ez viszont fennáll, mert tagjaik a CAO_1 és a CBO_2 derékszögű háromszögek befogói, e háromszögek pedig hasonlók, mert C-nél levő szögük az a és b félegyenesek hajlásszögének negyedrésze.

Az ábrán az ABC háromszög A-nál és B-nél levő szöge hegyesszög, meggondolásunk azonban akkor is helyes marad, ha valamelyik (pl. az A-nál levő) szög tompaszög.

Abban az esetben viszont, ha pl. $CAO_1\sphericalangle \neq 90°$, az AB egyenes átmegy O_1-en, a T pont egybeesik A-val, így

$$AF_1 = AO_1 = \frac{AO_1}{CA} \cdot CA = \frac{AO_1}{CA} \cdot CT,$$

tehát az (1) összefüggés ebben az esetben is fennáll. A bizonyítás további része változatlanul alkalmazható ebben az esetben is.



2. ábra

Megjegyzés. Az (1) és (2) összefüggések levezetésében nem használtuk ki, hogy f szögfelező; ezek még akkor is fennállnak, ha f az a és b határolta konkáv szögtérben van. (Ekkor a két kör érintési pontja f-en közrefogja C-t.) AO_1/AC, ill. BO_2/BC általában azon szögek felének a tangense, amelyet f-nek k_1-et érintő félegyenese a-val, ill. k_2-t érintő félegyenese b-vel zár be. Ezeket a félszögeket δ-val, ill. ε-nal jelölve (1) és (2) alapján a két körből kimetszett húrok hosszának arányára (ismét a húrok felével számolva)

$$\frac{AF_1}{BF_2} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varepsilon}.$$