

Ha létezik a feltételnek megfelelő  $x$  szám, akkor az kétjegyű, mert a 7-jegyű  $10^6$  számnál nagyobb, de a 13-jegyű  $100^6$ -nál kisebb a hatodik hatványa. Szűkebb korlátokat adnak  $x^6$ -ra az adott számjegyekkel írható legkisebb és legnagyobb szám. Mivel 0 az első helyen nem állhat, így azt nyerjük, hogy

$$203\,447\,889 \leq x^6 \leq 988\,744\,320.$$

A felső korlátot kissé növelve

$$x^6 < 10^9, \quad x^2 < 10^3, \quad x < \sqrt{1000} < 32.$$

Az alsó korlát minden esetre lényegesen nagyobb  $20^6 (= 64\,000\,000)$ -nál, viszont kisebb, mint  $25^6 = (625)^3 > (600)^3 = 216\,000\,000$ . Továbbmenve  $24^6 = ((3 \cdot 8)^3)^2 = (27 \cdot 512)^2 = 13\,824^2 < 14\,000^2 = 196\,000\,000$  már kisebb, mint az alsó korlát. Így a keresett szám 24 és 32 közé eshet csak (a határokat nem engedve meg).<sup>1</sup>

Vegyük észre, hogy az  $x^6$ -ra megadott számjegyek összege osztható 3-mal, vagyis  $x^6$  is osztható 3-mal. Ez csak úgy lehet, ha maga  $x$  is 3-mal osztható (3-mal nem osztható szám semmilyen hatványa sem osztható 3-mal). A 24-nél nagyobb és 32-nél kisebb természetes számok közül csak a 27 és a 30 osztható 3-mal, de 30 nem lehet a feladat megoldása, mert hatodik hatványa 6 db 0-ra végződik. Viszont  $27^6 = 387\,420\,489$ , a jegyek megegyeznek az adottakkal, tehát  $x = 27$ .

*Megjegyzések.* 1. A 3-mal való oszthatóság helyett a feladatnak megfelelő számot végződése alapján is kiválaszthatjuk. Ha ugyanis  $x$  végződése rendre

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

akkor  $x^6$  végződése rendre

$$0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1.$$

Mivel az adott számjegyek között 1, 5 és 6 nem szerepel, a már kiszámított korlátok közti számok közül  $x$  csak 27, 28 vagy 30 lehet. 30 a már említett ok miatt nem felel meg,  $28^6$  jegyei nem a megadottak, 27 viszont megfelel.

2. Több versenyző  $x^6$ -nak 9-cel való oszthatóságából  $x$ -nek 9-cel való oszthatóságára következtetett, és a kiszámított korlátok között egyedüli lehetőségként a 27-et jelölte meg. Ez a következtetés hamis, mert pl.  $3^6$  osztható 9-cel, de maga az alap: 3 nem.

---

<sup>1</sup> Az  $x^6$ -ra nyert egyenlőtlenségpárból leggyorsabban logaritmus segítségével kaphatunk  $x$ -re korlátokat. Mivel kétjegyű korlátot keresünk, elég négy (sőt akár 3) értékes jegyet tartani meg a 9-jegyű számokból, persze az alsó korlátot közben lefelé, a felsőt fölfelé kerekítve.