I. megoldás. Nem nehéz meghatározni a szóban forgó két számot – jelöljük ezeket x és y-nal –, majd negyedik hatványaik összegét. A feladat szerint

$$x+y=10, \qquad xy=4,$$

így x és y a

$$z^2-10z+4=0$$

másodfokú egyenlet két gyöke, vagyis $+5+\sqrt{21}$ és $+5-\sqrt{21}$ (bármelyiket tekinthetjük x-nek, a másik az y). Negyedik hatványaik összege

$$(5+\sqrt{21})^4+(5-\sqrt{21})^4=\left((5+\sqrt{21})^2\right)^2+\left((5-\sqrt{21})^2\right)^2=$$
$$=(46+10\sqrt{21})^2+(46-10\sqrt{21})^2=2(46^2+10^2\cdot 21)=8432.$$

II. megoldás. A feladatot egyszerűbben is megoldhatjuk, anélkül, hogy a két számot kiszámítanánk. Két szám negyedik hatványainak az összegét ugyanis általában kifejezhetjük a két szám összegének – jelöljük p-vel – és szorzatának – jelöljük q-val – a segítségével:

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\left((x+y)^2-2xy\right)^2-2(xy)^2=$$
$$=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+2q^2.$$

A $p=10$ és $q=4$ adatok behelyettesítésével:

$$x^4+y^4=8432.$$

Megjegyzések. 1. A két szám negyedik hatványainak összegét az összegük és szorzatuk segítségével többféleképpen is felírhatjuk, pl.

$$(x+y)^4=x^4+y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2=x^4+y^4+4xy(x^2+y^2)+$$
$$+6(xy)^2=x^4+y^4+4xy\left((x+y)^2-2xy\right)+6(xy)^2.$$

Innen x^4+y^4-t kifejezve rendezés után ismét a fönti kifejezést nyerjük.

2. Az x^4+y^4 polinom nem változik meg, ha benne x-et és y-t felcseréljük, ugyanez áll az $x+y$ és xy polinomokra is. Általában az x_1, x_2, …, x_n változók egy polinomját *szimmetrikus polinomnak* nevezzük, ha a változói helyébe ugyanezeket a változókat egy tetszés szerinti más sorrendben írva be a polinom nem változik meg (legfeljebb a tagok sorrendje változik). Ha $k\le n$, az x_1, x_2, …, x_n változókból képezhető összes k-tényezős szorzatok összegét a változók (k-adfokú) *elemi szimmetrikus polinom*jának nevezzük. Mármost az algebra egy nevezetes tétele szerint *minden szimmetrikus polinom kifejezhető a változói elemi szimmetrikus polinomjainak a polinomjaként. Ez a kifejezés* (összevont alakban) *a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

Ezt a kifejezést állítottuk elő a II. megoldásban, és nem véletlen, hogy ugyanarra az eredményre vezet az 1. megjegyzés átalakítása is.