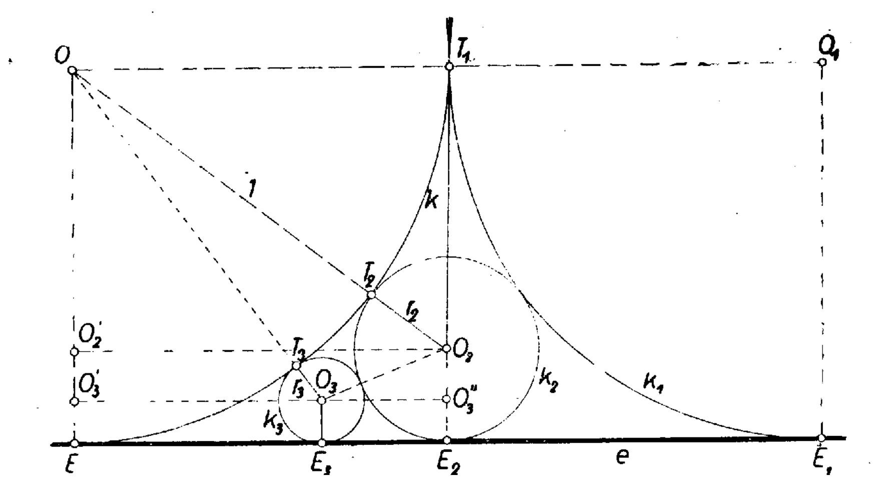

Legyen k és k_1 középpontja O, O_1, e-vel való, valamint közös érintkezési pontjuk E, E_1, ill. T_1. Nyilvánvaló, hogy k_2 az EE_1 szakasszal és az ET_1, E_1T_1 negyedkörívekkel határolt síkrészben helyezkedik el, k-t és k_1-et kívülről érinti, és O_2 középpontja az E_1E szakasz felező merőlegesén van. k_2 sugarát r_2-vel, k-n, ill. e-n való érintési pontját T_2, ill. E_2-vel, és O_2-nek OE-n való vetületét O_2'-vel jelölve az OO_2O_2' derékszögű háromszögből

$$OO_2^2 = O_2O_2'^2 + OO_2'^2 = E_2E^2 + (OE - O_2'E)^2,$$

azaz

$$(1+r_2)^2 = 1 + (1-r_2)^2,$$

és így $r_2 = 1/4$.

Világos, hogy k_3 gyanánt nem k_1-et, hanem az EE_2 szakasszal és az ET_2, E_2T_2 ívekkel határolt síkrészben fekvő kört kell tekintenünk, és hogy a $k_4, k_5, \ldots, k_n$ körök is minden kisebb sorszámú körtől különbözők. Legyen a körsorozat két egymás utáni tagja k_i és k_{i+1}, sugaruk r_i, r_{i+1}, érintkezési pontjuk k-val, ill. e-vel T_i, T_{i+1}, E_i, E_{i+1}, középpontjuk O_i, O_{i+1}, és ennek vetülete OE-re O_i', ill. O_{i+1}', végül O_{i+1} vetülete O_iE_i-re O_{i+1}'' (az ábrán az $i = 2$ eset látható). Ekkor az OO_iO_i', $OO_{i+1}O_{i+1}'$, $O_iO_{i+1}O_{i+1}''$ derékszögű háromszögből:

$$EE_i = O_i'O_i = \sqrt{OO_i^2 - (OE - O_i'E)^2} = \sqrt{(1+r_i)^2 - (1-r_i)^2} = 2\sqrt{r_i},$$

ugyanígy

$$EE_{i+1} = 2\sqrt{r_{i+1}},$$

tehát

$$E_{i+1}E_i = O_{i+1}O_{i+1}'' = \sqrt{O_iO_{i+1}^2 - O_iO_{i+1}''^2} = \sqrt{(r_i + r_{i+1})^2 - (r_i - r_{i+1})^2} = 2\sqrt{r_ir_{i+1}}.$$

Ezekkel $EE_i = EE_{i+1} + E_{i+1}E_i$-ből

$$2\sqrt{r_i} = 2\sqrt{r_{i+1}} + 2\sqrt{r_ir_{i+1}},$$

és a jobb oldal második tagjával osztva

(3)
$$\frac{1}{\sqrt{r_{i+1}}} = \frac{1}{\sqrt{r_i}} + 1.$$

Innen $r_2 = 1/4$-del $r_3 = 1/9$, és ebből $r_4 = 1/16$. Az így adódott

(4)
$$r_i = \frac{1}{i^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{r_i}} = i$$

sejtés teljes indukcióval azonnal igazolható; ha ugyanis (4) érvényes, akkor (3)-ból

$$\frac{1}{\sqrt{r_{i+1}}} = i+1, \quad \text{tehát} \quad r_{i+1} = \frac{1}{(i+1)^2}.$$

Ezzel a feladat kérdésére a választ megkaptuk.