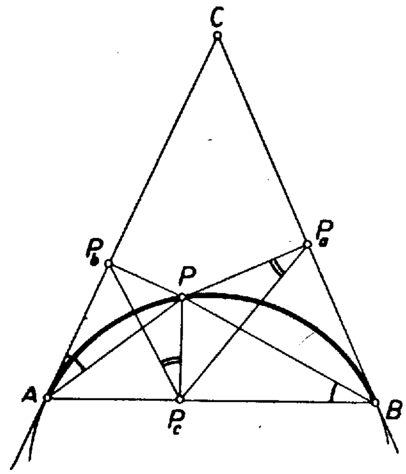

Megmutatjuk, hogy a feladat követelményeit kielégítő minden pontból ugyanakkora szög alatt látszik az AB alap. Legyen az ABC háromszögben $CA = CB$, és P egy a feltételnek megfelelő pont, azaz ha vetülete az AB alapra P_c, és a CA, CB szárra P_b, P_a, akkor

$$PP_a \cdot PP_b = PP_c^2.$$

PP_aBP_c és PP_cAP_b a PB, ill. PA átmérő fölötti Thalész-körbe írt húrnégyszögek. Ezért

$$P_aPP_c\sphericalangle = 180^\circ - P_aBP_c\sphericalangle = 180^\circ - CBA\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle = \\ = 180^\circ - P_bAP_c\sphericalangle = P_cPP_b\sphericalangle.$$

Másrészt a feltevésből átalakítással

$$PP_a : PP_c = PP_c : PP_b.$$

Ezek szerint a P_aPP_c és P_cPP_b háromszögek hasonlók, tehát $P_cP_aP\sphericalangle = P_bP_cP\sphericalangle$.

Ebből ismét az említett húrnégyszögekre tekintettel $P_cBP\sphericalangle = P_bAP\sphericalangle$, vagyis $ABP\sphericalangle = CAP\sphericalangle$. Így az ABP háromszögben

$$PAB\sphericalangle + ABP\sphericalangle = CAB\sphericalangle - CAP\sphericalangle + ABP\sphericalangle = CAB\sphericalangle,$$

tehát $APB\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle$, állandó. Eszerint P az AB szakasz $\omega = 180^\circ - CAB\sphericalangle$ nyílású látószög-körívének pontja. Csak arról az i körívről lehet szó, amely AB-nek C-vel megegyező oldalán van, mert P-nek az ABC háromszög belsejében kell lennie.

Mivel $CAB\sphericalangle < 90^\circ$, azért $\omega > 90^\circ$; így i-nek O középpontja AB-nek C-vel ellentétes oldalán van, és az i-hez tartozó középponti szög $AOB\sphericalangle = 360^\circ - 2\omega = 2CAB\sphericalangle$. Ezért az ABO háromszögből $BAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle = 90^\circ - CAB\sphericalangle$, tehát $OA \perp CA$. Eszerint az AC, BC szár A, ill. B-ben érinti i-t, vagyis A és B-t nem tekintve i minden pontja az ABC háromszög belsejében van.

Megmutatjuk, hogy i minden Q pontja megfelel a követelménynek. Legyen Q vetülete az AB, AC, BC oldalon Q_c, Q_b, Q_a. Mivel Q az i íven van, $AQB\sphericalangle = 180^\circ - CAB\sphericalangle$. Így az ABQ háromszögből

$$QBA\sphericalangle = 180^\circ - AQB\sphericalangle - QAB\sphericalangle = CAB\sphericalangle - QAB\sphericalangle = CAQ\sphericalangle,$$

másrészt QQ_aBQ_c és QQ_cAQ_b húrnégyszögek, ezért

$$QQ_aQ_c\sphericalangle = QBQ_c\sphericalangle = QBA\sphericalangle = CAQ\sphericalangle = Q_bAQ\sphericalangle = Q_bQ_cQ\sphericalangle,$$

és ugyanígy $QBC\sphericalangle = QAB\sphericalangle$-ből $QQ_cQ_a\sphericalangle = QQ_bQ_c\sphericalangle$. Eszerint a QQ_aQ_c és QQ_cQ_b háromszögek hasonlók, ebből $QQ_a : QQ_c = QQ_c : QQ_b$ és $QQ_a \cdot QQ_b = QQ_c^2$, amit bizonyítani akartunk.

Ezek szerint az előírt tulajdonságú pontok mértani helye az adott egyenlő szárú háromszög szárait az alap végpontjaiban érintő körnek az érintési pontok közé eső kisebb íve, az érintési pontokat nem számítva.

Megjegyzések. 1. Több versenyző kimondta és bebizonyította, hogy az említett kör minden pontjára nézve a száraktól mért távolságok mértani közepe egyenlő az alaptól mért távolsággal.

2. Többen trigonometriai számításokon keresztül jutottak arra, hogy az APB szög független a P pont helyzetétől.