I. megoldás. a páratlan szám, s így minden esetre 0-tól különböző, tehát az egyenlet másodfokú. Tegyük fel a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy az

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gyökök racionálisak. Ekkor $\sqrt{b^2 - 4ac}$ is racionális, de ez csak úgy lehet, ha egész is a négyzetgyök értéke. Mert ha valamilyen d/g törttel volna egyenlő, feltehetjük hogy ez a tört tovább már nem egyszerűsíthető alakja. De ekkor d^2/g^2 sem egyszerűsíthető, mert különben volna egy prímszám is, amivel egyszerűsíthető, de d^2 és g^2 csak úgy lehet p-vel osztható, ha d és g is osztható p-vel, [1] tehát d/g is egyszerűsíthető volna. Kell tehát, hogy $g^2 = 1$, s így $b^2 - 4ac = d^2$ legyen. Itt d páratlan, mert a bal oldalon b-vel együtt b^2 is az, és egy páratlan és páros szám különbsége páratlan. Így d egy páros számmal tér el b-től, $d = b - 2d'$. Ekkor

$$b^2 - 4ac = (b - 2d')^2, \quad 4ac = 4d'(b - d'),$$
$$ac = d'(b - d').$$

Az utolsó egyenlőségben azonban balról két páratlan szám szorzata áll és ez páratlan; a jobb oldalon viszont ha d' páros, akkor az első tényező páros, ha pedig d' páratlan, akkor a második tényező két páratlan szám különbsége s így páros szám. Ez az egyenlőség tehát nem állhat fenn. Így helytelen volt az a feltevésünk, amiből kiindultunk, hogy az (1) egyenletnek volna racionális gyöke.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy valamilyen p/q tört kielégítené (1)-et. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. Feltehetjük, hogy p/q már tovább nem egyszerűsíthető alakban van írva. Feltevésünk szerint

$$a\frac{p^2}{q^2} + b\frac{p}{q} + c = 0.$$

Innen, q^2-nel szorozva

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0. \tag{2}$$

Ha itt p is, q is páratlan, akkor a bal oldal mindhárom tagja is az, mert páratlan számok szorzata is páratlan, s így az összeg is páratlan. De akkor is páratlan (2) bal oldala, ha p és q közül az egyik páratlan, a másik páros, mert ekkor két tag páros, egy páratlan. Így egyik esetben sem lehet (2) bal oldala 0. Viszont p is, q is páros nem lehet, mert akkor a p/q tört egyszerűsíthető volna. Így (2) nem teljesülhet, tehát p/q nem elégítheti ki (1)-et.

Megjegyzések. 1. Több versenyző rámutatott, hogy az utóbbi bizonyítással bármely, csupa páratlan együtthatós, páros fokszámú egyenletről belátható, hogy nem lehet racionális gyöke.

2. *Fila Jenő* tanár (Zilah, Román NK.) megjegyezte, hogy még általánosabban, ha

$$f(x) = a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_{2k-1}x + a_{2k}$$

(páros fokú) egész együtthatós polinom, továbbá a_0, a_{2k} és még páratlan számú együttható páratlan, akkor $f(x)$ racionális helyen nem lehet 0. A fenti gondolatmenet mintájára

$$q^{2k}f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0p^{2k} + a_1p^{2k-1}q + \ldots + a_{2k-1}pq^{2k-1} + a_{2k}q^{2k}.$$

Ha itt p és q egyike páros, a másika páratlan, akkor a jobb oldal páratlan, mert egy tag páratlan (az első vagy az utolsó); ha pedig p is, q is páratlan, akkor a páratlan együtthatás tagok páratlanok, a páros együtthatósak párosak, s így a jobb oldal ismét páratlan. Nem lehet tehát 0, s így $f\left(\frac{p}{q}\right)$ sem.

[1] Ez abból következik, hogy minden szám egyértelműen bontható prímszámok szorzatára. Ugyanis d^2-et prímtényezők szorzatára bonthatjuk úgy, hogy d-t felbontjuk és ezt a felbontást négyzetre emeljük. Ha ettől különböző felbontás nem lehetséges, akkor d^2-nek valóban nem lehet olyan prímosztója, ami nem osztója d-nek.