Az (1) és (2) egyenletekből

$$(x+y)^2-(x^2+y^2)=(a^2-a)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2,$$
$$2xy=a(a-1)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2. \tag{3}$$

Ezt felhasználva a $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ kifejezést fogjuk átalakítani. Tagokra bontva és (1)-et felhasználva

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}=a(\sqrt{x}-\sqrt{y})-2\sqrt{xy}.$$

A jobb oldal utolsó tagját (3) alapján így alakíthatjuk át:

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{4xy}=\sqrt{2a(a-1)}(\sqrt{x}-\sqrt{y}). \tag{4}$$

Ezt behelyettesítve

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

Innen, ha $\sqrt{x}-\sqrt{y}\neq 0$, akkor

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=a-\sqrt{2a(a-1)}, \tag{5}$$

ha pedig $\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$, akkor (2)-ből $x=y=0$ adódik, ami a tetszés szerinti értéke mellett megoldása az egyenletrendszernek. A továbbiakban csak az ettől különböző megoldásokat keressük.

Meg tudjuk határozni $\sqrt{x}-\sqrt{y}$-hoz hasonlóan $\sqrt{x}+\sqrt{y}$-t is, a négyzetét alakítva át (1), (4) és (5) felhasználásával:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}=a(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{2a(a-1)}(\sqrt{x}-\sqrt{y})=$$
$$=\left(a+\sqrt{2a(a-1)}\right)\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)=a^2-2a(a-1)=a(2-a).$$

Innen

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a(2-a)}. \tag{6}$$

(5) és (6)-ból

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a(2-a)}-\sqrt{2a(a-1)}+a\right), \tag{7}$$
$$\sqrt{y}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a(2-a)}+\sqrt{2a(a-1)}-a\right). \tag{8}$$

Végül négyzetre emeléssel

$$x=\frac{1}{4}[a(2-a)+2a(a-1)+a^2+2a\sqrt{a(2-a)}-2a\sqrt{2a(a-1)}-$$
$$-2\sqrt{a(2-a)2a(a-1)}]=$$
$$=\frac{1}{4}\left(2a^2+2a\sqrt{a(2-a)}-2a\sqrt{2a(a-1)}-2\sqrt{a(2-a)2a(a-1)}\right),$$

azaz

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a(2-a)}\right)\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right). \tag{9}$$

Ugyanígy nyerjük, hogy

$$y=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a(2-a)}\right)\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right). \tag{10}$$

Ezek szerint csak (9) és (10) adhatja a feladat megoldását – eltekintve $x=y=0$-tól –, feltéve, hogy értelemmel bír a valós számok körében, azaz sem $a(2-a)$, sem $2a(a-1)$ nem negatív. Az első kifejezés a negatív és 2-nél nagyobb értékeire negatív, a második azokra, amelyekre $0<a<1$. Így csak $a=0$ és $1\leq a\leq 2$ értékek jönnek tekintetbe. Az $a=0$ és $a=2$ értékre (9) és (10) a már tárgyalt $x=y=0$ megoldást adja, $1\leq a<2$-re ettől különböző értékpárokat. Az is világos, hogy az x-re és y-ra (amik (1) és (2)-ben négyzetgyökjel alatt is szerepelnek) kapott értékek nem negatívok, mert a $\sqrt{x}$-re és $\sqrt{y}$-ra kapott (7) és (8) kifejezések is valós számot adnak a szóba jövő a-értékekre, x és y pedig ezekből négyzetre emeléssel keletkezett.

Megmutatjuk még, hogy az $\sqrt{x}$-re $\sqrt{y}$-ra kapott kifejezések sem negatívok. Ekkor ezen kifejezéseket is felhasználva behelyettesítéssel könnyen látható, hogy (9) és (10) valóban megoldását adja az egyenletrendszernek. (7)-ből a

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a(2-a)}-\sqrt{2a(a-1)}+a\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2-a}-\sqrt{2(a-1)}\right)$$

kifejezés a pozitív $\sqrt{a}+\sqrt{2-a}+\sqrt{2(a-1)}$-gyel megszorozva a következőt kapjuk:

$$\frac{\sqrt{a}}{2}[(\sqrt{a}+\sqrt{2-a})^2-2(a-1)]=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(a+2-a+2\sqrt{a(2-a)}-2a+2\right)=$$
$$=\sqrt{a}\left(\sqrt{a(2-a)}+2-a\right).$$

Ez $1\leq a<2$-re pozitív, tehát (7) jobb oldala is. Hasonlóan (8)-ból

$$\sqrt{y}\left(\sqrt{2-a}+\sqrt{2(a-1)}+\sqrt{a}\right)=\frac{\sqrt{a}}{2}\left[\left(\sqrt{2-a}+\sqrt{2(a-1)}\right)^2-a\right]=$$
$$=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(2-a+2a-2+2\sqrt{2(2-a)(a-1)}-a\right)=\sqrt{2a(2-a)(a-1)}\geq 0,$$

ha $1\leq a<2$, tehát (8) bal oldala sem lehet negatív.

Ezzel beláttuk, hogy az (1), (2) egyenletrendszernek megoldása minden a mellett az $x=y=0$ értékpár. Ezen kívül $1\leq a<2$-re van megoldása, és azt a (7), (8) képletpár szolgáltatja.

Megjegyzések. 1. A közölt megoldás lényegében annak felel meg, hogy $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ és $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ helyett új változókat vezetünk be és először ezeket határozzuk meg.

2. Könnyen kiküszöbölhetjük az egyenletrendszerből a négyzetgyökös kifejezéseket, levonva a (2) a-szorosából (1) négyzetét:

$$a(x^2+y^2)-(x+y)^2=a^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2-\left[a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\right]^2=0,$$
$$(a-1)x^2-2xy+(a-1)y^2=0.$$

Innen meghatározható az y/x hányados és ennek ismeretében (1)-ből x, majd y. Ezen az úton azonban kissé bonyolultabbak a számítások, mint a fenti megoldásban.