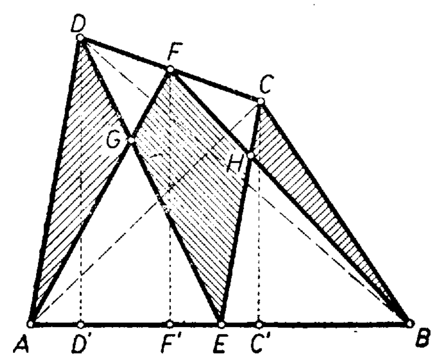
I. megoldás: Húzzuk meg a négyszög AC és BD átlóit. Az AF és CE szakasz az ACD, ill. ABC háromszögben súlyvonal, tehát a háromszöget két egyenlő területű háromszögre osztja (8. ábra):



8. ábra

$$ADF = ACF, \qquad BCE = ACE \tag{1}$$

(az idomok területét ugyanúgy jelöljük, mint magukat az idomokat). Ezekből összeadással

$$ADF + BCE = AECF, \tag{2}$$

mert az $ABCD$ négyszög konvexsége folytán D és B az AC-nek ellentétes partján feküsznek, és ezért ugyanez áll F és E-re is. Figyelembe véve a DE és BF egyenesekkel való felbontást is, (2)-t így írhatjuk:

$$ADG + DGF + BCH + BHE = AEG + CFH + EHFG \tag{3}$$

(mindkét oldalon az $ABCD$ négyszög területének fele áll).

Hasonlóan a DE és BF súlyvonalakkal két-két egyenlő részre osztott ABD és BCD háromszögekből

$$ADE + BCF = EBFD, \tag{4}$$

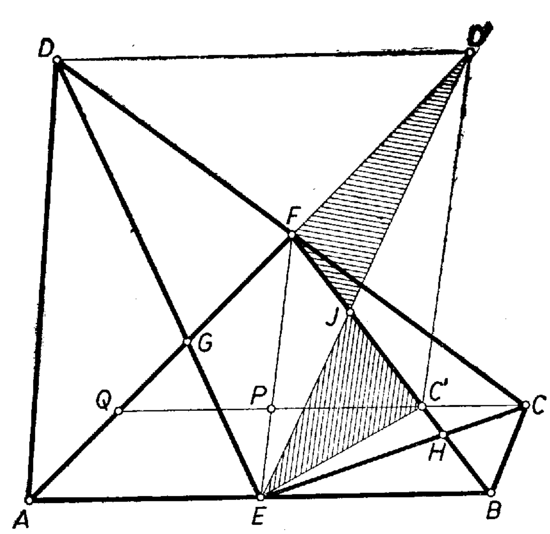
amit részletesebben így írhatunk:

$$ADG + AEG + BCH + CFH = BHE + DGF + EHFG. \tag{5}$$

Már most (3) és (5) összegéből a két oldalon fellépő egyenlő tagok elhagyásával és 2-vel való osztással a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk:

$$ADG + BCH = EHFG.$$

II. megoldás: Ismeretes, hogy a trapézt átlói négy olyan háromszögre bontják, melyek közül a szárakra támaszkodók egyenlő területűek. Ezt a tételt fogjuk háromszor felhasználni. Feltehetjük, hogy D és C közül D van távolabb AB-től. Húzzunk D-n és C-n át AB-vel párhuzamost és jelöljük ezeknek AF meghosszabbításával, ill. BF-fel való metszéspontját D', ill. C'-vel (9. ábra), továbbá ED' és FC' metszéspontját J-vel.



9. ábra

$AED'D$ és $EBCC'$ trapézok, így

$$AGD = EGD'$$

és

$$BCH = EHC'.$$

Az EGD' és EHC' háromszögek együttesen nem takarják le az $EHFG$ négyszöget, kinyúlik az $FD'J$, nincs lefedve az $EC'J$ háromszög. Ha sikerül igazolnunk, hogy ezek egyenlő területűek, akkor a feladat tételét bebizonyítottuk. Ehhez viszont elegendő megmutatni, hogy $C'D'$ párhuzamos EF-fel, mert ekkor az $EC'D'F$ négyszög trapéz voltából következik állításunk.

Jelöljük CC'-nek EF és AF-fel való metszéspontját P, ill. Q-val. Így EF az AB szakasszal együtt a vele párhuzamos QC' szakaszt is felezi. Másrészt a QCF és $D'DF$ háromszögek egybevágóságából következik, hogy $QF = FD'$. Tehát P, ill. F a $QC'D'$ háromszög QC', ill. QD' oldalának felezőpontja, és így valóban PF párhuzamos $C'D'$-vel.

Ha D és C egyenlő távolságra esnek AB-től, akkor D' és C' egybeesnek F-fel, és így az EGD' és EHC' háromszögek együtt pontosan lefedik az $EHFG$ négyszöget.

III. megoldás: Azt mutatjuk meg, hogy

$$AED + EBC = ABF,$$

illetőleg e területeket 2, 2, ill. 3 idom területének összegeként felírva

$$AEG + ADG + EBH + BCH = AEG + EBH + EHFG.$$

Innen ugyanis a két oldal egyenlő tagjainak elhagyásával a bizonyítandó tételt kapjuk.

Valóban, D, F, C-nek AB-n levő vetületét rendre D', F', C'-vel jelölve (8. ábra) a $CDD'C'$ idom trapéz, és benne FF' a középvonal, tehát

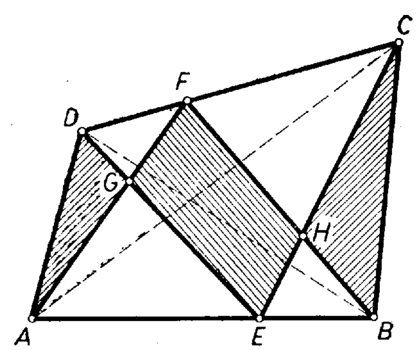
$$\frac{DD'}{2} + \frac{CC'}{2} = FF'.$$

Innen pedig mindkét oldalt AE-vel szorozva, majd az $AE = EB = AB/2$ egyenlőségeket figyelembe véve

$$\frac{1}{2}AE \cdot DD' + \frac{1}{2}EB \cdot CC' = \frac{1}{2}AB \cdot FF'$$

adódik, ami állításunkat igazolja.

Megjegyzések. 1. A feladat állítása általánosítható: a kimondott területegyenlőség akkor is fennáll, ha E és F az AB, ill. CD oldalt (nem felezi, hanem) ugyanolyan q arányban osztja két-két részre: $AE : EB = q$, azaz $AE = q \cdot EB$, és ugyanígy $CF = q \cdot FD$ (10. ábra, itt $q = 2$).



10. ábra

Az állítás mindhárom fenti megoldás gondolatmenetével igazolható; alább az I. megoldás módosításával bizonyítjuk. Az ott szereplő (1)–(3) egyenlőségek jobb oldala most a bal oldal q-szorosával lesz egyenlő, (4) és (5) bal oldala viszont a jobb oldal q-szorosával. Így a (3) és (5)-ből keletkezett egyenlőségek összegében 2 helyett $(1+q)$-val osztva kapjuk az általánosítás állítását. Ez az általánosítás *Bollobás Béla* dolgozatában szerepel.

2. Könnyű belátni, hogy a nem konvex (vagyis az egy $180°$-nál nagyobb belső szöggel bíró, valamint a hurkolt) négyszögekre az állítás nem igaz.