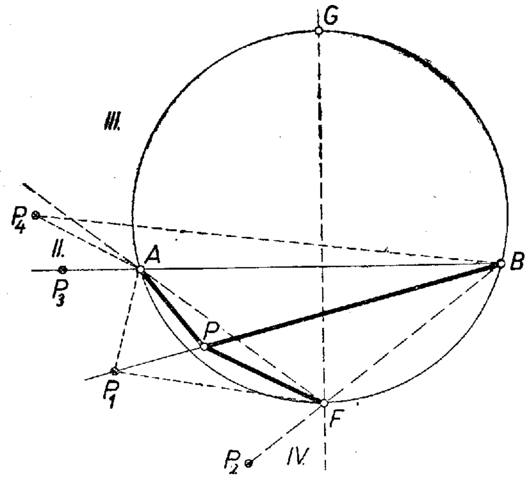
I. megoldás: A feltevések folytán P az F ponthoz tartozó FG átmérővel kettévágott k kör azon félkörének belsejében van, amelynek ívén A fekszik.

a) Tulajdonképpen csak az AFG szögtartományban fekvő P pontokra kell bizonyítást adnunk, mert az FA húrral lemetszett kisebb körszeletben levő P pontokra az állítás magától értetődő, hiszen ilyenkor A és B az FP egyenes ugyanazon partján vannak, és ezért az FPB szög része az APF szögnek (1. ábra).

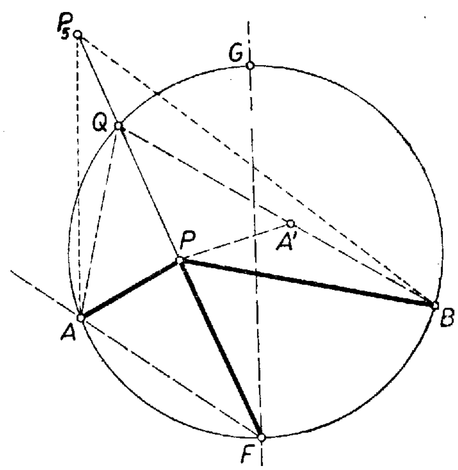


1. ábra

Másképpen: ilyen esetekben a PB félegyenes benne van az APF szögtartományban.

b) Ugyanez áll akkor is, ha P az FA húron van, mert ilyenkor az APF szög bármelyik irányú forgással $180°$, az FPB szög pedig kisebb.

c) Ha P az AFG szögtartományban van, akkor FP szétválasztja A-t és B-t. (2. ábra).



2. ábra

Tükrözzük FP-re az APF szöget, legyen az A pont tükörképe A'. Ekkor elegendő azt igazolnunk, hogy az FPB szög része az FPA-val egyenlő FPA' szögnek. – Messe az FP egyenes k-t másodszor Q-ban. Így egyrészt az FQA és FQB szögek egyenlők, mert k-nak a száraik közti FA, FB ívei egyenlők, másrészt a tükrözés folytán az FQA és FQA' szögek egyenlők, és ezért A' és QB egyenesen van, továbbá $QA' = QA < QB$, tehát A' a QB húr belső pontja. Így pedig a PB félegyenes valóban az $A'PF$ szögtartományban van.

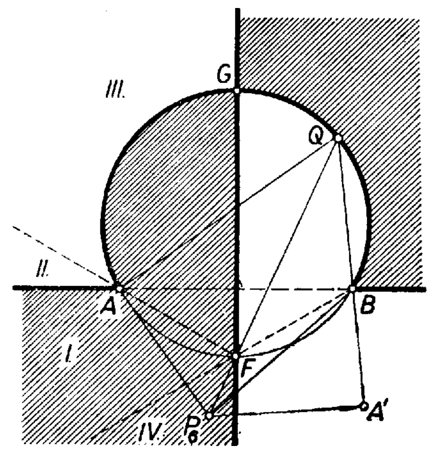
A fentiekben az állítást P minden lehetséges helyzetére igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Nem használtuk fel, hogy az F-fel felezett AB ív kisebb félkörnél, ezért az állítás bármekkora AB ívre érvényes.

2. A bizonyítás *a)* részében nem használtuk fel, hogy P a k-n belül van, így meggondolásunk az ABF szögtartomány k-n és rajta kívül fekvő I. része minden pontjára érvényes (az 1. ábrán P_1), úgyszintén a BF szakasz F-en túli meghosszabbításának P_2 pontjaira is, mert így a P_2B és P_2F félegyenesek egybeesnek, szögük 0. Az I. síkrész másik határoló félegyenesén, a BA szakasz A-n túli meghosszabbításán levő P_3 pontokra viszont a két kérdéses szög azonos.

Kézenfekvő most már legalább vázlatosan áttekinteni a kérdéses szögek nagyságviszonyát minden az (1)-et teljesítő P pontra. Ha P kilép I-ből BA-nak A-n túli meghosszabbításán át, de nem lépi át FA-t (II. síkrész, P_4), akkor a PB félegyenes kilép az APF szögtartományból, APF része BPF-nek, (2) iránya ellentétesre fordul. Ugyanez adódik a III.

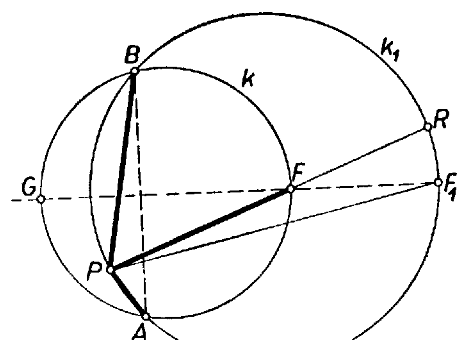
síkrészben, vagyis ha P az AFG szögtartománynak k-n kívüli pontja (a 2. ábrán P_5), mert ilyenkor a *c)* alatti Q pont F és P_5 közé esik, és így $A'P_5F\sphericalangle < BP_5F\sphericalangle$.



3. ábra

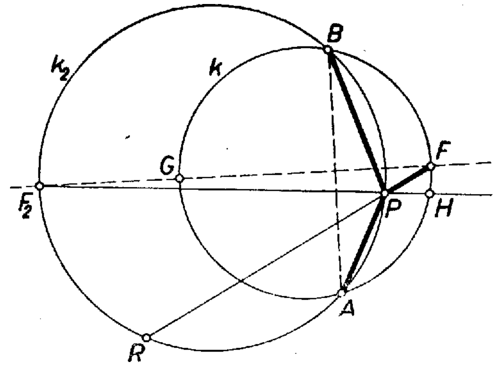
Végül a IV. síkrészben választott P_6-tal Q a GB íven adódik (3. ábra), ezért $QA' > QB$, így $AP_6F\sphericalangle = A'P_6F\sphericalangle > BP_6F\sphericalangle$, itt tehát érvényes (2). – Most már a $PA > PB$ követelmény mellett a megfelelő síkrészek határvonalait FG-re tükrözéssel kapjuk, így a 3. ábra csíkozott részein a kérdéses szögek közül APF nagyobb, a világosakon FPB nagyobb, a határvonalakon pedig a két szög – amint az könnyen belátható – egyenlő. *(Mezei Ferenc* „térképvázlata").

A további megoldásokban csak a fenti *c)* esettel foglalkozunk, ezt 3 alesetre bontjuk fel aszerint, hogy P az AB-nek F-fel ellentétes, ill. megegyező partján van – vagyis az utóbbi alesetben az ABF háromszögben – vagy pedig magán az AB húron. – Mindkét további megoldás *Muszély György* megoldásainak egyszerűsítése.



4. ábra

II. megoldás: *c_1)* Ha P az AB-nek F-fel ellentétes oldalán van (4. ábra), akkor a kérdéses APF és FPB szögek a kisebb APB szögnek részei. Az A, B, P pontokon átmenő k_1 kör P-t nem tartalmazó, vagyis k-n kívül levő AB ívének F_1 felezőpontja az AB egyenesnek F-fel egyező oldalára, vagyis GF-nek F-en túl való meghosszabbítására esik. Így F_1 az APF szögtartományban van, F pedig az F_1PB szögtartományban. Ámde PF_1 felezi a kisebb APB szöget, ennélfogva az APF szög F_1PF szöggel nagyobb, az FPB szög pedig ugyanennyivel kisebb az APB szög felénél, ez megfelel az állításnak.



5. ábra

c_2) Ha P az AB-nek F-fel egyező oldalán van (5. ábra), akkor az A, B, P pontokon átmenő k_2 kör P-t nem tartalmazó, vagyis k-n kívül levő AB ívének F_2 felezőpontja az AB egyenesnek F-fel ellentétes oldalára, FG-nek G-n túl való meghosszabbítására esik. A kérdéses APF és FPB szögek egyenes szögnél nagyobb összegét ebben az alesetben F_2P-nek P-n túl való PH meghosszabbítása felezi. A PH félegyenes FG-nek A-t tartalmazó oldalán van, ezért az APF szöget osztja részekre. Így az APF szög nagyobb, FPB pedig kisebb az $APH = HPB$ szögnél. Ezt kellett bizonyítanunk.

c_3) Végül ha P az AB szakaszon van, akkor (2) fennáll, mert APF tompaszög, FPB pedig hegyesszög.

Megjegyzések. 1. A *c_2)* aleset meggondolása nem alkalmazható az FA húrral lemetszett körszeletben felvett P-re, mert ilyen esetben a $180°$-nál nagyobb APF szöget hasonlítanók az FPB szöghöz.

2. Lényegében a fenti meggondolást mondjuk el másképpen annak az R pontnak a helyzetét tekintetbe véve, ahol a PF egyenes a k_1, ill. k_2 kört másodszor metszi.

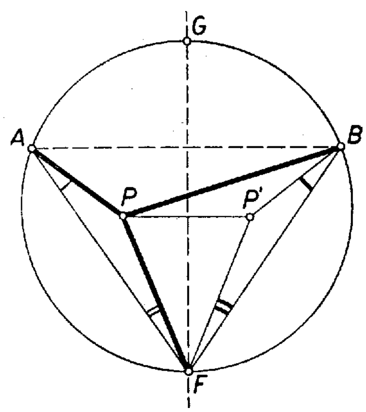
A *c_1)* alesetben (4. ábra) F a k_1-re nézve belső pont, ezért R egyrészt a PF szakasz F-en túl való meghosszabbításán van, FG-nek P-vel ellentétes, vagyis B-vel egyező oldalán. Másrészt R a P-t nem tartalmazó AB ívnek pontja. Ezek szerint R a (rövidebb) BF_1 íven van. Így k_1-nek AF_1R íve hosszabb a BR ívnél, tehát $APR\sphericalangle > RPB\sphericalangle$, vagyis $APF\sphericalangle > FPB\sphericalangle$.

A *c_2)* alesetben (5. ábra) F a k_2-re nézve külső pont, ezért R egyrészt az FP szakasz P-n túli meghosszabbításán van, FG-nek P-vel egyező, B-vel ellentétes oldalán, másrészt az AF_2B íven. Így R a (rövidebb) AF_2 ívnek pontja, $\widehat{AR} < < \widehat{RB}$, $APR\sphericalangle < RPB\sphericalangle$, ezért $180° - APR\sphericalangle > 180° - RPB\sphericalangle$, azaz $APF\sphericalangle > FPB\sphericalangle$.

III. megoldás: A feladat állítása akkor és csak akkor igaz, ha az APF háromszög A és F-nél levő (belső) szögeinek összege kisebb, mint a BPF háromszög B és F-nél levő (belső) szögeinek összege. Ezt fogjuk bizonyítani.

Legyen P tükörképe FG-re P', így az $APP'B$ négyszög konvex trapéz.

A *c_1)* alesetben P' az FBP szögtartományban van (6. ábra).



6. ábra

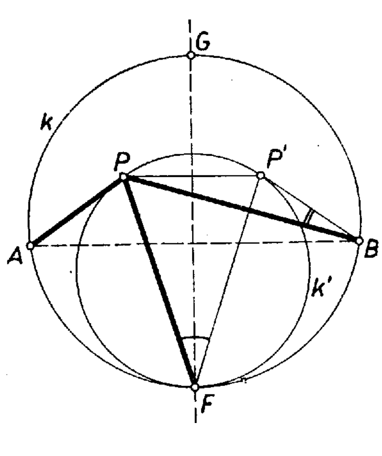
Ugyanis P és P' az ABP háromszög belsejében vannak, tehát $P'BA\sphericalangle < FBA\sphericalangle$, másrészt az ABP háromszögből (1) alapján $PBA\sphericalangle < PAB\sphericalangle = P'BA\sphericalangle$. Ennélfogva

$$PAF\sphericalangle = P'BF\sphericalangle < PBF\sphericalangle. \tag{3}$$

Másrészt P' a BFG szögtartományban van, amely része BFP-nek, ezért

$$PFA\sphericalangle = P'FB\sphericalangle < PFB\sphericalangle. \tag{4}$$

Most már (3) és (4) két-két szélső tagjának összeadásával a kívánt egyenlőtlenség adódik.



7. ábra

Ha pedig AB elválasztja P-t és F-et (7. ábra), akkor egyrészt

(5) $$PFB\sphericalangle - PFA\sphericalangle = PFB\sphericalangle - P'FB\sphericalangle = PFP'\sphericalangle,$$

ez pedig PP' látószöge F-ből; másrészt

(6) $$PAF\sphericalangle - PBF\sphericalangle = P'BF\sphericalangle - PBF\sphericalangle = PBP'\sphericalangle,$$

ez pedig PP' látószöge B-ből; ekkor B ugyanazon oldalán fekszik PP'-nek, mint F. – Mármost a $PP'F$ háromszög köré írt k' kör érinti k-t F-ben, minden más pontja k belsejében van, így B a k'-re nézve külső pont. Ezért PP'-nek B-ből vett látószöge kisebb az F-ből vett látószögénél, azaz (5) és (6) alapján

$$PAF\sphericalangle - PBF\sphericalangle < PFB\sphericalangle - PFA\sphericalangle.$$

Innen pedig átrendezéssel

$$PAF\sphericalangle + PFA\sphericalangle < PBF\sphericalangle + PFB\sphericalangle,$$

amit bizonyítani akartunk.