I. megoldás: Fejezzük ki az adott kapcsolatból x-et y-nal. Így megadhatjuk, mely y-okhoz lehet x-et kiszámítani, más szóval, hogy mely y számokhoz van olyan x érték, amelyre függvényünk az y értéket veszi fel, vagyis mi függvényünk értékkészlete. Ebből már kiválaszthatjuk a keresett maximumot, ill. minimumot – hacsak az értékkészletben van legnagyobb, ill. legkisebb szám.

A nevező sehol sem 0, mert $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$, ezért az átszorzással és rendezéssel adódó

$$(y-2)x^2+(4y-6)x+(5y-6)=0$$

kapcsolat ekvivalens az eredetivel. Innen

$$x=\frac{-4y+6\pm\sqrt{-4y^2+16y-12}}{2(y-2)}, \tag{1}$$

hacsak $y\neq 2$, és $x=-2$, ha $y=2$.

x a gyökképletből akkor és csak akkor adódik valósnak, ha a diszkrimináns nem negatív, vagyis ha – a másodfokú kifejezést mindjárt szorzattá alakítva –

$$-4(y-1)(y-3)\geq 0.$$

Ez pedig nyilván akkor és csak akkor teljesül, ha

$$1\leq y\leq 3.$$

Ez a kettős egyenlőtlenség írja le függvényünk teljes értékkészletét, mert ennek a külön úton nyert fenti $y=2$ szám is eleget tesz. Eszerint függvényünknek van maximuma is, minimuma is, éspedig az

$$y_{\max}=3,\qquad \text{ill.}\qquad y_{\min}=1$$

érték. Ezeket a függvény (1) szerint az

$$x_{\max}=-3,\qquad \text{ill.}\qquad x_{\min}=-1$$

helyen veszi fel.

Megjegyzés. Néhány dolgozat a helyes eredményre a következő téves meggondolással jutott el: „maximum és minimum azok az értékek, amelyeket a függvény csak egyszer vesz fel, ezek azok, ahol a diszkrimináns 0.” Eszerint minden elsőfokú függvény számára minden érték maximum volna és egyben minimum is; másrészt az $y=1$ érték nem volna maximuma az $y=\sin x$ függvénynek, úgyszintén $y=-1$ sem volna ennek minimuma, mert mindegyik értéket végtelen sokszor veszi fel. Azt mutatja ez, hogy a szélső értékek fogalma egyedül a másodfokú függvényre alapult.

II. megoldás. Osztással és a nevezőben teljes négyzetté való kiegészítéssel az adott kifejezés így alakítható:

$$y=2-\frac{2x+4}{x^2+4x+5}=2-\frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1},$$

majd $x+2$ helyére új z változót írva

$$y=2-\frac{2z}{z^2+1}=2-2y_1,\quad \text{ahol}\quad y_1=\frac{z}{z^2+1}. \tag{2}$$

Eszerint y-nak ott van maximuma, ahol az y_1 függvény minimális értéket vesz fel, és ott van minimuma, ahol y_1 maximális. y_1 lehet pozitív, negatív és 0, mert ugyanolyan jelű, mint a z számláló, hiszen nevezője pozitív, $z=0$ mellett pedig $y_1=0$; ezért y_1 maximuma csak pozitív, minimuma csak negatív érték lehet. Elég y_1-et pozitív z-k mellett vizsgálni, mert z és $-z$ mellett felvett értékei csak előjelben különböznek, tehát az így meghatározandó maximum értékének, és helyének (-1)-szerese megadja a minimum értékét és helyét.

További átalakítással

$$y_1=\frac{z}{z^2+1}=\frac{1}{z+\dfrac{1}{z}}=\frac{1}{y_2},\quad \text{azaz}\quad y_2=z+\frac{1}{z},$$

így y_1 maximuma egyenlő az y_2 függvény minimumával. Vegyük észre, hogy pozitív z mellett az y_2 összeg két tagjának mértani közepe 1, állandó. Ismeretes másrészt, hogy pozitív számok számtani közepe sohasem kisebb mértani középüknél, és akkor egyenlő vele, ha a számok egyenlők. Eszerint y_2 felének minimuma 1, így $y_{2,\min}=2$, és ez akkor adódik, ha z az a pozitív szám, amelyre $z=1/z$, vagyis $z=1$.

Most már y_1 maximuma $1/2$, és a fentiek szerint minimuma a $z=-1$ helyen $y_{1,\min}=-1/2$; végül (2) szerint y minimuma 1, maximuma 3, és e szélső értékeket $x=z-2$ figyelembevételével az $x=-1$, ill. $x=-3$ helyen veszi fel.

III. megoldás: Alakíthatjuk y-t a következők szerint is:

$$y=1+\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+5}=1+\frac{(x+1)^2}{(x+2)^2+1},$$

$$y=3-\frac{x^2+6x+9}{x_2+4x+5}=3-\frac{(x+3)^2}{(x+2)^2+1}.$$

Az első alak második tagja sohasem negatív, mert számlálója teljes négyzet és nevezője pozitív. Eszerint y minimumát $x+1=0$-nál, vagyis az $x=-1$ helyen veszi fel; itt a második tag 0, és y értéke 1. Hasonlóan a második alak kivonandója akkor legkisebb, ha $x+3=0$, azaz $x=-3$, és itt értéke 0, tehát y maximuma 3.