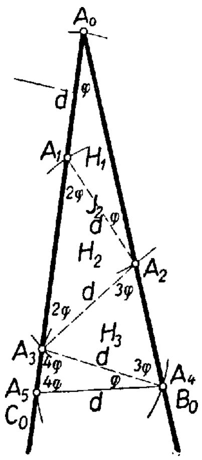
Legyen a $BAC$ szög nagysága $\varphi$, így az $ABC$ szög $n\varphi$. Ezek különbözők, ezért a háromszög szárai vagy $A$-ban, vagy $B$-ben futnak össze. Az állítást a két esetre külön-külön bizonyítjuk.

*I. eset:* a szárak $AB$ és $AC$, tehát a $C$ csúcsnál levő szög nagysága $n\varphi$, a szögek összegéből $\varphi = 180°/(2n+1)$, ez hegyesszög, mert $2n+1 \geq 5$, és $n\varphi$ ugyancsak hegyesszög. – Elegendő egy olyan $A_0B_0C_0$ háromszöget adnunk, amely $n-1$ egyenes vágással $n$ egyenlő szárú háromszögre bontható egyenlő hosszú szárakkal és hasonló az $ABC$ háromszöghöz. Nyilvánvaló ugyanis, hogy az $A_0B_0C_0$-t $ABC$-be átvivő hasonlósági transzformációval valamennyi vágásszakasz megfelelőjét $ABC$-ben megszerkesztve és e háromszöget a kapott szakaszok mentén szétdarabolva ebből is $n$ egyenlő szárú háromszög áll elő egyenlő hosszú szárakkal.

Egy a kívánt tulajdonsággal bíró $A_0B_0C_0$ háromszöget egy $A_0$ csúcsú, $\varphi$ nagyságú szögből kiindulva a következő, $n+1$ lépésből álló és lépésenként 1–1 újabb segédpontot előállító szerkesztéssorozattal kaphatunk. A segédpontokat rendre $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$, $A_{n+1}$-gyel jelöljük. Első lépésül $A_0$-ból egy tetszés szerinti $A_0A_1 = d$ szakaszt mérünk a szög egyik szárára (1. ábra, ezen $n = 4$).

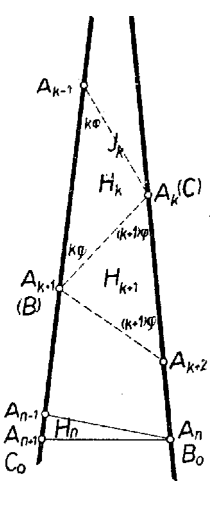



*1. ábra*

A 2. lépésben $A_1$ körül $d$ sugárral kört írva $A_2$-ként vesszük e körnek a szög másik szárán levő, $A_0$-tól különböző metszéspontját. A további pontokat váltakozva a szög egyik és másik szárából metsszük ki az utoljára kapott pont körül $d$ sugárral írt körívvel és mindig úgy, hogy azok a korábbi metszéspontoktól különbözők legyenek. Így $A_3$ gyanánt az $A_2$ körül $d$ sugárral írt körnek a szög első, $A_0A_1$ szárán levő, $A_1$-től különböző metszéspontját vesszük. Az $n+1$-edik lépés után $A_n$-t $B_0$-nak, $A_{n+1}$-et $C_0$-nak véve előttünk áll a kívánt $A_0B_0C_0$ háromszög, és ezt az $A_1$-től $A_n$-ig terjedő egymás utáni $n-1$ segédpontpárt összekötő $n-1$ egyenlő szakasz darabolja fel a kívánt módon.

Mivel az $A_0$-nál levő $\varphi$ szög hegyesszög, azért $A_2$ valóban a másik száron jön létre. Az $A_1A_0A_2 = H_1$ háromszög egyenlő szárú, így $A_2$-nél levő szöge is $\varphi$, tehát $A_1$-nél levő külső szöge $\varphi + \varphi = 2\varphi$. – Ez is hegyesszög, ezért $A_3$ az $A_0$-tól távolabb jön létre, mint $A_1$. Így az említett külső szög az $A_2A_1A_3 = H_2$ egyenlőszárú háromszögnek belső szöge, tehát $H_2$-nek $A_3$-nál levő szöge is $2\varphi$, továbbá $H_2$ kívül áll $H_1$-en, $A_1A_2$ oldaluk közös, $A_1$-be befutó $A_1A_3$ és $A_1A_0$ oldalaik egymás meghosszabbításai, így együtt kitöltik az $A_0A_2A_3 = J_2$ háromszöget. Ezért az $A_1A_3A_2$ szög $J_2$-nek is szöge, ennélfogva $J_2$-nek $A_2$-nél levő külső szöge $\varphi + 2\varphi = 3\varphi$. – Ha $n > 2$, vagyis $n \geq 3$, akkor $3\varphi$ is hegyesszög, így $A_4$ távolabb van $A_0$-tól, mint $A_2$. Ezért az $A_3A_2A_4 = H_3$ egyenlő szárú háromszög kívülről csatlakozik $J_2$-höz és $A_4$-nél levő szöge is $3\varphi$, egyenlő az utóbbi külső szöggel. Az $A_3A_4A_2$ szög a $J_2$ és $H_3$-ból összetevődő $A_0A_3A_4 = J_3$ háromszögnek is szöge, így $J_3$-nak $A_3$-nál levő külső szöge $\varphi + 3\varphi = 4\varphi$.

Teljes indukcióval minden $k \leq n$-re könnyű belátni, hogy az $A_kA_{k-1}A_{k+1} = = H_k$ egyenlő szárú háromszögben $A_kA_{k-1}A_{k+1}\sphericalangle = A_kA_{k+1}A_{k-1}\sphericalangle = k\varphi$ (2. ábra).



2. *ábra*

Ennek helyességét $k = 1,\ 2$-re és $n \geq 3$ mellett $k = 3$-ra az előzőkben láttuk. Ha már most $k$ olyan az $n$-nél kisebb szám, amelyre állításunk érvényes, akkor érvényes $k+1$-re is. Ugyanis $k < n$ folytán $k+1 \leq n$, és így a műveletsorozat még folytatódik. Az $A_0A_kA_{k+1} = J_k$ háromszög $A_k$-nál levő külső szöge $(k+1)\varphi \leq n\varphi < 90°$, ezért az $A_{k+1}$ körüli $d$ sugarú körrel az $A_0A_k$ szárból kimetszett $A_{k+2}$ távolabb van $A_0$-tól, mint $A_k$, tehát az $A_{k+1}A_kA_{k+2} = H_{k+1}$ egyenlő szárú háromszög kívülről csatlakozik $J_k$-hoz. Így $J_k$-nak $A_k$-nál levő $(k+1)\varphi$ nagyságú külső szöge $H_{k+1}$-nek belső szöge, tehát $A_kA_{k+2}A_{k+1}\sphericalangle = A_{k+2}A_kA_{k+1}\sphericalangle = (k+1)\varphi$. Ezek szerint állításunk érvényessége valóban öröklődik minden az $n$-nél kisebb $k$-ról $k+1$-re.

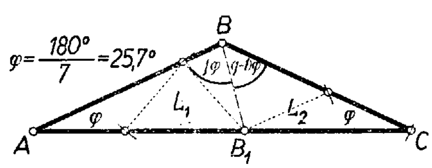
Tekintsük most már a $J_n = A_0A_nA_{n+1} = A_0B_0C_0$ háromszöget. Ebben a fentiek szerint $A_0C_0B_0\sphericalangle = A_0A_{n+1}A_n\sphericalangle = A_{n-1}A_{n+1}A_n\sphericalangle = n\varphi$, és ezért $A_0B_0C_0\sphericalangle = 180° - \varphi - n\varphi = (2n+1)\varphi - (1+n)\varphi = n\varphi$. Így $J_n$ egyenlő szárú, a szögek egyenlősége folytán hasonló az adott $ABC$ háromszöghöz és maradéktalanul szétvágható a $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ egyenlő szárú háromszögekre. A szerkesztéssorozat első és utolsó lépése, az $A_0A_1$ és $A_nA_{n+1}$ szakasz nem vágandó, tehát a vágások száma $(n+1) - 2 = n - 1$. Mindezek szerint $J_n$-nek megvan a kívánt tulajdonsága. Ezt kellett megmutatnunk.

Továbbhaladás előtt vegyük észre, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszögben $B_0C_0 = A_nA_{n+1} = d$. Ennek alapján megtakaríthatjuk a hasonlósági transzformációt: a fenti szerkesztéssorozatot az adott háromszögben $A$-ból kezdve és $d = BC$-vel végrehajtva azonnal a kívánt felbontást kapjuk. Így $A_n$ és $A_{n+1}$ kitűzése elmarad. A szerkesztéssorozatot fordított sorrendben, azaz $B$ vagy $C$-ből kezdve is végrehajthatjuk, ilyenkor $A_{n-1}$ az első szerkesztett pont.

Vegyük észre azt is, hogy szerkesztéssorozatunk első $k+1$ lépésével, ill. az $A_1A_2\ldots A_{k-1}A_k$ vágássorozat $k-1$ vágásával, az $A_0A_kA_{k+1} = J_k$ (nem egyenlő szárú) háromszöget is az előírt tulajdonságú háromszögekre daraboltuk (itt $A_kA_{k+1}$ nem vágandó, mert $J_k$ határának tekintjük). A felhasznált feltételeket áttekintve látjuk, hogy a következő általánosabb tételt bizonyítottuk be: Minden olyan $ABC$ háromszög, melyben a $B$ csúcsnál hegyes szög van és ez $k$-szor akkora, mint az $A$ csúcsnál levő szög, – ahol $k$ az 1-nél nagyobb egész szám, – szétvágható $k-1$ egyenes vágással $k$ számú olyan egyenlő szárú háromszögre, hogy valamennyi rész-háromszög szárai egyenlők; a vágásszakaszok hossza a $BC$ oldallal egyenlő. (Az első vágást célszerű $C$-ből indítani; de indulhat páros $k$ esetén az $AB$ oldal, páratlan $k$ esetén az $AC$ oldal azon $A_1$ pontjából is, melyre $AA_1 = BC$.

*II. eset:* a szárak $BA$ és $BC$, a $C$-nél levő szög $\varphi$. Az állítást $n$ párossága szerint két alesetben bizonyítjuk.

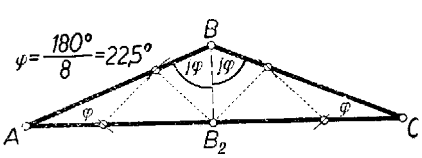
*II/1. aleset:* $n$ páratlan. Legyen $n = 2j-1$, ahol $j > 1$, egész szám, így a szögek összegéből $\varphi = 180°/(2j+1)$. A bizonyítást visszavezethetjük az I. esetre. Mérjük fel az $AB$ szárat $A$-tól az $AC$ alapra (3. ábra).




3. *ábra*

Az előálló $B_1$ végpont az $AC$ szakaszon van, mert $n\varphi > \varphi$ folytán $AC > AB$. A háromszöget $BB_1$ mentén kettévágva az $ABB_1 = L_1$ és $CBB_1 = L_2$ háromszögekre már alkalmazhatjuk a fenti általános tételt. Ugyanis $L_1$ egyenlő szárú, és a $BB_1$ alapon levő szögeinek nagysága $(180° - \varphi)/2 = (2j+1-1)\varphi/2 = j\varphi = j \cdot pBAB_1\sphericalangle$. Ennélfogva $L_2$-ben $CBB_1\sphericalangle = CBA\sphericalangle - B_1BA\sphericalangle = (2j-1)\varphi - j\varphi = (j-1)\varphi = (j-1)\cdot BCB_1\sphericalangle$. Továbbá a $B$-nél levő részszögek hegyesszögek, mert az $ABB_1$ szög egy egyenlő szárú háromszögnek alapon levő szöge, a $CBB_1\sphericalangle = (j-1)\varphi$ pedig kisebb $ABB_1\sphericalangle = j\varphi$-nél. A vágásszakasz hossza $L_1$ és $L_2$-ben egyaránt $BB_1$, mint az $A$, ill. $C$-nél levő $\varphi$ szöggel szemben fekvő oldal. A vágások száma $1 + (j-1) + (j-2) = 2j - 2 = n - 1$, a létrejövő háromszögek száma pedig $j + (j-1) = 2j - 1 = n$, amint bizonyítanunk kellett.

*II/2. aleset:* $n$ páros: $n = 2j$, ahol $j \geq 1$, egész szám. Vágjuk ketté az $ABC$ háromszöget a $B$ csúcsból induló $BB_2$ magasságvonallal (4. ábra).




4. *ábra*

A létrejött egybevágó $ABB_2$ és $CBB_2$ derékszögű háromszögek $B$-nél levő szögei hegyesszögek és $n/2 = j$-szer akkorák, mint az $A$, ill. $C$-nél fekvő szögek. Így a két rész-háromszög a fenti tétel szerint az előírásnak megfelelően feldarabolható (ill. $j = 1$, azaz $n = 2$ esetén már fel is van darabolva), tehát az eredeti háromszög is. A vágásszakaszok hossza $BB_2$, a vágások száma az egész háromszögben $1 + 2(j-1) = 2j - 1 = n - 1$, és az egyenlő szárú rész-háromszögek száma $2j = n$ az állításnak megfelelően. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Megjegyzés.* A feldarabolhatóság bizonyításában az I. esetben a $B$-nél levő $n\varphi$, szög csúcsából kiinduló vágással is kezdhettük volna vágási sorozatunkat. Így be kellett volna bizonyítanunk, hogy az utolsó vágás utáni maradékháromszög ugyancsak egyenlő szárú.