I. megoldás: Igyekezzünk az (1) egyenlőtlenséget olyan alakra hozni, melynek helyessége már nyilvánvaló. Szorozzuk meg (1)-et a feltevés szerint pozitív $2a$ számmal, elegendő az így nyert

$$2a^2 + 2ac - 2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \le 4ac - b^2$$

egyenlőtlenséget igazolni, vagy ehelyett is az átrendezéssel keletkezett

$$(2) \qquad 2a^2 - 2ac + b^2 \le 2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2}$$

egyenlőtlenséget.

a) Ha itt a bal oldal negatív, azaz $2a^2 - 2ac + b^2 < 0$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, mert a jobb oldal a négyzetgyök egyértelmű értelmezése, valamint a feltevés folytán nem lehet negatív. Mivel eddig csak megfordítható átalakításokat végeztünk, ebben az esetben a kiindulási egyenlőtlenség is helyes, mégpedig az egyenlőtlenség jele áll fenn.

b) Ha pedig a bal oldal nem-negatív, akkor elég megmutatni, hogy a bal oldal négyzete nem nagyobb a jobb oldal négyzeténél:

$$(3) \qquad (2a^2 - 2ac + b^2)^2 \le 4a^2(a-c)^2 + 4a^2b^2 = (2a^2 - 2ac)^2 + 4a^2b^2.$$

A jobb oldal első tagját a bal oldalra áthozva és a két négyzet különbségét szorzattá alakítva:

$$b^2(4a^2 - 4ac + b^2) \le 4a^2b^2,$$

végül minden tagot a jobb oldalra gyűjtve

$$(4) \qquad 0 \le b^2(4ac - b^2).$$

Mivel itt az első tényező mindig, a második pedig a feltevés szerint nem-negatív, azért a szorzat valóban nem negatív, és mint láttuk, ebből következik az eredet egyenlőtlenség helyessége. Egyenlőség (4)-ben és ezzel együtt az előző egyenlőtlenségekben is csak a $b^2 = 0$, vagy a $4ac - b^2 = 0$ esetben lehetséges.

Ha azonban valamely a, b, c értékrendszerrel (4)-ben és így (3)-ban is egyenlőség teljesül, ebből visszafelé nem föltétlenül következik, hogy (2)-ben és így (1)-ben is egyenlőség áll fenn, mert (2) jobb oldala pozitív, a bal azonban nem föltétlenül. Így a fönt említett két esetben meg kell még vizsgálnunk, állhat-e – és ha igen, milyen feltételek mellett – (1)-ben egyenlőség.

$b = 0$ esetén (1) így alakul:

$$\begin{aligned} a + c - |a - c| &\le 2c, \\ a - c &\le |a - c|, \end{aligned}$$

itt egyenlőség csak $a \ge c$ esetén áll fenn.

$4ac - b^2 = 0$ esetén (1) így alakul:

$$\begin{aligned} a + c - |a + c| &\le 0, \\ a + c &\le |a + c|, \end{aligned}$$

itt csak $a + c \ge 0$ esetén áll fenn egyenlőség. Ez azonban mindig teljesül, mert $4ac = b^2 \ge 0$ és $a > 0$ folytán $c \ge 0$.

Mindezek szerint (1) a feltevések mellett mindig teljesül, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha vagy

$$\begin{aligned} &1) \quad b = 0 \quad \text{és} \quad a \ge c, \quad \text{vagy} \\ &2) \quad 4ac - b^2 = 0. \end{aligned}$$

Megjegyzések: 1. Többen a negatív oldalakat tartalmazó

$$-2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \le -(2a^2 - 2ac + b^2)$$

egyenlőtlenség gépies négyzetreemelésével a bizonyítandó egyenlőtlenségnek éppen az ellenkezőjét vélték „bizonyítani". Ezek a versenyzők a négyzetre emeléskor hibáztak, mert hiszen pl. $-5 < 4$, és $-5 < -4$, de négyzetreemelés után már a $25 > 16$ egyenlőtlenség áll fenn.

2. Azokra az a, b, c értékrendszerekre, amelyekre (2) bal oldala negatív, az eredeti egyenlőtlenség $4ac - b^2$ előjelétől függetlenül teljesül. (Itt csak a pozitív voltát használtuk ki.)

Azokra az a, b, c értékrendszerekre, amelyekre (2) bal oldala nem-negatív, $4ac - b^2 \le 0$ és $a > 0$ esetén az eredeti egyenlőtlenség fordítottja igaz; $a < 0$ és $4ac - b^2 \ge 0$ esetén az egyenlőtlenségnek szintén az ellenkezője igaz; és végül $a < 0$ és $4ac - b^2 \le 0$ esetén az eredeti egyenlőtlenség igaz.

II. megoldás: Vonjuk ki a vizsgálandó egyenlőtlenség bal oldalát a jobb oldalból; átalakítás és összevonás után

(5)
$$\frac{4ac-b^2}{2a}-(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+b^2}=$$
$$=\sqrt{(a-c)^2+b^2}-(a-c)-\frac{b^2}{2a}\geq 0.$$

Ebből egyszerűbb kifejezés adódik, ha megszorozzuk a

(6)
$$\sqrt{(a-c)^2+b^2}+(a-c)+\frac{b^2}{2a}$$

értékkel. Ez a szorzó nem negatív, mert nagyobb vagy egyenlő, mint $|a-c|+(a-c)$, ami pedig nem negatív, és 0 is csak $b=0$, $a\leq c$ esetben lesz, de ekkor (5) bal oldala $|a-c|-(a-c)=2(c-a)\geq 0$, tehát a bizonyítandó állítás érvényes.

Ha (6) értéke pozitív, és megszorozzuk vele (5)-öt, akkor

(7)
$$\left(\sqrt{(a-c)^2+b^2}-(a-c)-\frac{b^2}{2a}\right)\cdot\left(\sqrt{(a-c)^2+b^2}+(a-c)+\frac{b^2}{2a}\right)=$$
$$=(a-c)^2+b^2-\left[(a-c)+\frac{b^2}{2a}\right]^2=b^2-\frac{b^2}{a}(a-c)-\frac{b^4}{4a^2}=$$
$$=\frac{b^2(4ac-b^2)}{4a^2}\geq 0.$$

Ebből következik az állítás helyessége. Az egyenlőség esetének vizsgálata ugyanúgy történhet, mint az I. megoldásban.

Megjegyzés: A (6) kifejezés átalakításából adódik, hogy

$$\sqrt{(a-c)^2+b^2}+(a-c)+\frac{b^2}{2a}=\sqrt{(a+c)^2-(4ac-b^2)}+(a+c)-\frac{4ac-b^2}{2a}\leq 2(a+c).$$

Ha a (7) bal oldalán (6) helyébe a nála nagyobb vagy egyenlő (pozitív) $2(a+c)$-t tesszük és átosztunk vele, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{(a-c)^2+b^2}-(a-c)-\frac{b^2}{2a}\geq\frac{b^2(4ac-b^2)}{8a^2(a+c)},$$

és ebből további átalakítással

(8)
$$(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\leq\left(1-\frac{b^2}{4a(a+c)}\right)\cdot\frac{4ac-b^2}{2a}.$$

Ez a feladatban kitűzött állításnál erősebb állítás. Ugyanis a jobb oldal első tényezőjének értéke általában kisebb 1-nél.

III. megoldás: Az (1) egyenlőtlenség bal oldala nem negatív, mert

$$a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}=a+c-\sqrt{(a+c)^2-(4ac-b^2)}\geq a+c-|a+c|=0,$$

ugyanis a feltétel szerint $4ac-b^2\geq 0$, és $a>0$, tehát $c\geq 0$, és így $a+c>0$.

Ha pozitív a bal oldal (vagyis ha $4ac-b^2\geq 0$), akkor osszuk el vele mindkét oldalt. Ekkor azt kell megmutatni, hogy a mondott feltételek mellett

(9)
$$A=\frac{\frac{4ac-b^2}{2a}}{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}\geq 1.$$

Gyöktelenítsük a nevezőt:

$$A=\frac{(4ac-b^2)\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)}{2a[(a+c)^2-(a-c)^2-b^2]}=$$

(10)
$$=\frac{(4ac-b^2)\left(a+c+\sqrt{(a-c)^2+b^2}\right)}{2a(4ac-b^2)}.$$

Ha $4ac - b^2$-ről feltettük, hogy nem zérus, egyszerűsítve vele

$$A = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2a} \geq \frac{a + c + |a - c|}{2a},$$

és itt ha *a)* $a \geq c$, akkor a jobb oldalon $2a/2a = 1$ áll,
ha pedig *b)* $a < c$, akkor a jobb oldal értéke $2c/2a > 1$,
tehát mindig $A \geq 1$.

Egyenlőség csak az *a)* esetben állhat, éspedig akkor és csak akkor, ha

$$\sqrt{(a-c)^2 + b^2} = |a - c|, \quad \text{azaz ha} \quad b = 0.$$

Ha viszont a $4ac - b^2$ kifejezés eltűnik, akkor, mint láttuk, az eredeti egyenlőtlenség bal oldala eltűnik, és eltűnik a jobb oldal is, tehát ez esetben is helyes az állítás, mégpedig egyenlőség áll fenn.

Megjegyzés: Míg az előző megoldásból egy élesebb felső becslést sikerült kapnunk, addig ebből a megoldásból (1) bal oldalára alsó becslést kaphatunk. Ha $4ac - b^2$ pozitív, akkor (10)-ben egyszerűsítve vele

$$A = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2a} = \frac{a + c + \sqrt{(a+c)^2 - (4ac - b^2)}}{2a}.$$

A tört értékét határozottan növeljük, ha a gyökjel alatti pozitív kivonandót elhagyjuk:

$$A < \frac{a + c + |a + c|}{2a} = \frac{2(a+c)}{2a} = \frac{a+c}{a}.$$

A értékét (9)-ből beírva és átszorozva kapjuk

$$\frac{4ac - b^2}{2a} < \left[a + c - \sqrt{(a-c)^2 + b^2}\right] \cdot \frac{a+c}{a},$$

vagyis

$$\frac{a}{a+c} \cdot \frac{4ac - b^2}{2a} < a + c - \sqrt{(a-c)^2 + b^2}. \tag{11}$$

Ez akkor is teljesül, ha (1)-ben $b = 0$ és $a \geq c$ folytán egyenlőség áll fenn; ha pedig $4ac - b^2 = 0$, akkor (11) is egyenlőségbe megy át, mert mindkét oldal értéke 0.

Így (9) és (11)-gyel (1) bal oldalát a következő korlátok közé szorítottuk:

$$\frac{a}{a+c} \cdot \frac{4ac - b^2}{2a} \leq a + c - \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \leq \left(1 - \frac{b^2}{4a(a+c)}\right) \cdot \frac{4ac - b^2}{2a}.$$