Előzetes megjegyzés. Számos versenyző azt határozta meg, hány az 1-es számjegyet tartalmazó szám [1], van különkülön az egy-, a két-, ..., a hatjegyű számok között, és a feladat kérdésére a választ e hat szám összegével adta meg. Ehhez hasonló, de egyszerűbb megoldás a következő.

I. megoldás: Legfeljebb hatjegyűek azok a számok, amelyek leírásához egy, vagy két, vagy ..., vagy hat számjegy szükséges, más szóval hat számjegy elegendő. Mindezek pontosan hat jeggyel is írhatók, ha a 0 jegyet a többi jegyektől meg nem különböztetve kezdő számjegyként is megengedjük, és minden legfeljebb öt jeggyel írt szám elé annyi 0-t gondolunk írva, hogy jegyeinek száma hat legyen.

Jelöljük az 1-es jegyet tartalmazó legfeljebb n-jegyű számok számát F_n-nel. Így nyilván $F_1 = 1$, mert az egyjegyű számok közül egy felel meg: az 1, és feladatunk F_6 megállapítása. Tegyük fel, hogy F_n-et már ismerjük; ekkor F_{n+1}-et a következő meggondolással kaphatjuk meg. Csoportosítsuk az 1-es jegyet tartalmazó legfeljebb $n+1$ jegyű számokat kezdő jegyük szerint. Az 1-essel kezdődők száma 10^n, mert bennük a további n helyre tetszés szerint írhatunk jegyeket, mindegyikre a 10-féle jegy mindegyikét, egymástól függetlenül. [2] A $0,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ 9$-essel kezdődő $n+1$ jegyűek száma pedig minden csoportban F_n, hiszen ezeknek a hátralevő n jegyű részükben kell 1-est tartalmazniuk. Ezzel valamennyi megfelelő $n+1$-jegyű számot figyelembe vettük, mindegyiket pontosan egyszer, tehát

$$F_{n+1} = 10^n + 9 \cdot F_n.$$

Ezzel ún. *rekurzív*[3] képletet kaptunk F_n kiszámítására. Így $F_2 = 10 + 9 \cdot F_1 = 19$, $F_3 = 100 + 9 \cdot 19 = 271$, $F_4 = 1\,000 + 9 \cdot 271 = 3\,439$, $F_5 = 10\,000 + 9 \cdot 3\,439 = = 40\,951$, végül $F_6 = 100\,000 + 9 \cdot 40\,951 = 468\,559$. – Ezzel a kérdésre a választ megadtuk.

II. megoldás: Csoportosítsuk a szóban forgó számokat aszerint, hogy a legértékesebb helyen álló, más szóval balról első 1-es jegyük rendre az egyes, a tízes, a százas, ..., a százezres *helyen* áll. Így hat csoport jön létre és minden számunk pontosan egy csoportba jut. Az előállításban az említett 1-es helyének kivételével mind az öt további helyet úgy kell betöltenünk, hogy az említett 1-es után bármely jegy állhat, előtte pedig bármely 1-től különböző jegy.

Az első csoport számainak az egyes értékű, vagyis balról az utolsó jegye 1-es, több 1-est nem tartalmaznak. Bennük a tízes értékű helyre az 1-estől különböző 9 jegy mindegyikét figyelembe kell vennünk. Bármelyiket véve tízesnek a százas értékű jegy ismét 9-féleképpen töltendő be, így a tízes és százas értékű helyeken $9 \cdot 9$-féle betöltés lehetséges. Ugyanígy a további három hely is 9-féleképpen tölthető be, tehát e csoport 9^5 számot tartalmaz.

A második csoportba tartozó számok tízes értékű jegye 1, a mögötte álló egyes értékű helyre mind a 10 jegyet írhatjuk, az előtte álló négy jegyet pedig ismét 9-féleképpen választhatjuk meg, így ebben a csoportban $9^4 \cdot 10$ számot kapunk. – Tovább haladva csoportról csoportra eggyel-eggyel több hely tölthető be 9 helyett 10-féleképpen, így az 1-est tartalmazó számok száma a hat csoportból összesen:

$$N = 9^5 + 9^4 \cdot 10 + 9^3 \cdot 10^2 + 9^2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 + 10^5.$$

Vegyük észre, hogy e hat tagú összeg tagjai mértani sorozatot alkotnak 10/9 hányadossal, így az összegképlettel $N = 468\,559$.

III. megoldás: Kombinatorikai ismeretekre és a binomiális tételre támaszkodva a kérdéses számok számát az előzőkhöz hasonlóan a bennük fellépő 1-esek *száma* szerint csoportosított előállításuk alapján is megkaphatjuk, a számokat itt is hatjegyűre kiegészített alakjukban állítva elő. Az egyetlen 1-est tartalmazó számok 1-esét a 6 hely mindegyikén kell figyelembe vennünk, a többi 5 helyen pedig a további 9 jegyet minden lehetséges módon, tehát az ilyen számok száma $6 \cdot 9^5$. A pontosan két, három, ..., hat 1-est tartalmazó számok 1-eseinek helyét rendre

$$\binom{6}{2}, \quad \binom{6}{3}, \quad \binom{6}{4}, \quad \binom{6}{5}, \quad \binom{6}{6} = 1$$

féleképpen választhatjuk meg és minden egyes megválasztás után a többi $4,\ 3,\ 2,\ 1$ helyet $9^4,\ 9^3,\ 9^2, 9$-féleképpen tölthetjük be, ill. az utolsó esetben készen is vagyunk, nincs további betöltendő hely. Ezek alapján a keresett szám

$$N = 6 \cdot 9^5 + \binom{6}{2} \cdot 9^4 + \binom{6}{3} \cdot 9^3 + \binom{6}{4} \cdot 9^2 + \binom{6}{5} \cdot 9 + 1.$$

Vegyük észre, hogy N ezen kifejezéséhez első tagként 9^6-ot adva al $(9+1)^6$ hatvány kifejtését kapjuk. Ennek alapján

$$N = (9+1)^6 - 9^6 = 10^6 - 9^6 = 1\,000\,000 - 531\,441 = 468\,559.$$

IV. megoldás: A legutóbbi eredményhez egyszerűbben így juthatunk el. Tekintsük valamennyi hatjegyű és hatjegyűen írható számot, beleértve 0-t is a $000\,000$ alakban, ezek száma $999\,999 + 1$, másképpen 10^6, mert mind a hat

[1] A feladat tartalmának megfelelően elég „természetes szám” helyett röviden „szám”-ot mondanunk.

[2] Másképpen: e számok $100\ \ldots\ 0$-tól $199\ \ldots\ 9$-ig terjednek, ahol a 0-ok, ill. 9-esek száma n, – így számuk $199\ \ldots\ 9 - 9\ \ldots\ 99 = 100\ \ldots\ 0 = 10^n$.

[3] Szó szerint: visszafutó; az előzőre támaszkodó.

helyre mind a 10 jegyet egymástól függetlenül sorra vesszük. A követelménynek megfelelő számokhoz úgy jutunk, ha elhagyjuk az 1-es jegyet nem tartalmazó számokat, más szóval mindazokat, amelyekben a 6 hely mindegyikén 1-estől különböző jegy áll. Ezek száma 9^6, tehát $N = 10^6 - 9^6$. (Eközben a 0-t is elhagytuk.)

Megjegyzések: 1. A II. megoldásban kapott összeget $10 - 9$ alakban 1-gyel szorozva a III. megoldásban kapott $10^6 - 9^6$ alakra hozhatjuk.

2. A IV. megoldásban azt használtuk fel, hogy valamennyi legfeljebb hatjegyű természetes számnak összessége, ill. az 1-es nem tartalmazása miatt elhagyandó számok összessége – a 0-t mindkét összességbe beszámítva – azonos a 10-, ill. 9-féle számjegy ismétléses 6-odosztályú variációival.

3. Általánosítások: *a)* Egyik megoldásban sem használtuk ki, hogy a kitüntetett számjegy éppen az 1-es. Eszerint azoknak a legfeljebb hatjegyű természetes számoknak a száma, amelyekben egy adott tetszőleges (0-tól különböző) jegy előfordul: 468 559.

b) Mindegyik megoldás gondolatmenete akkor is alkalmazható, ha az olyan legfeljebb n-jegyű természetes számok számát keressük, amelyekben egy megadott (0-tól különböző) számjegy előfordul. Ezek száma (pl. a IV. megoldásból) $10^n - 9^n$.

c) Ugyanezt a kérdést egy tetszőleges k alapú számrendszerben vizsgálva – ahol k az 1-nél nagyobb természetes szám, és a figyelembe vett számjegy nem a 0, – a követelménynek eleget tevő számok száma

$$k^n - (k-1)^n.$$