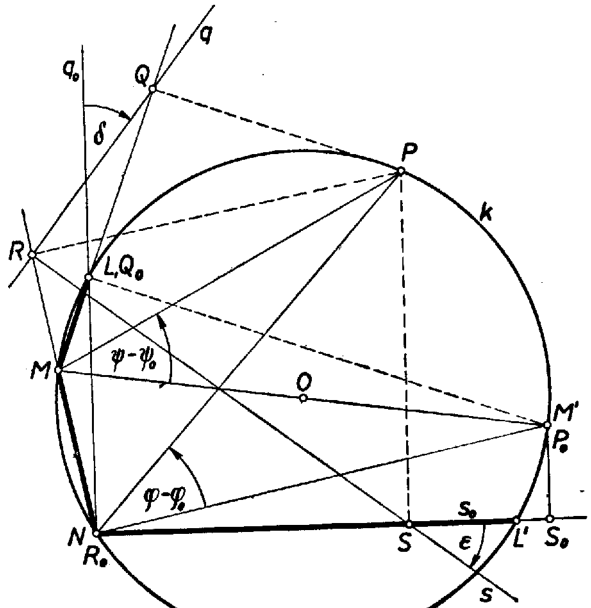
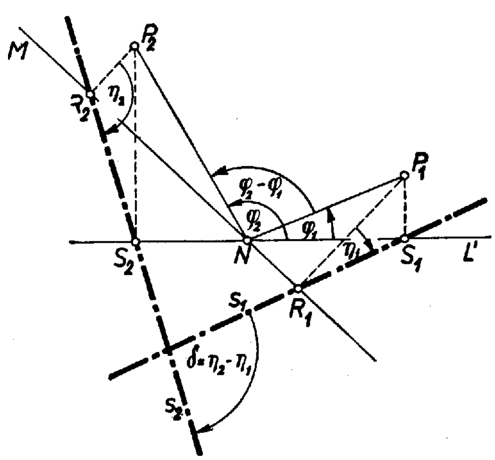
I. megoldás: A $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6 = H_2$ hatszög bármelyik két egymás utáni oldalát – három egymás utáni csúcsát – az $ABCA'B'C' = H_1$ hatszög három egymás utáni oldala – négy egymás utáni csúcsa – határozza meg; és az első és a negyedik csúcs egy átmérőnek két végpontja.

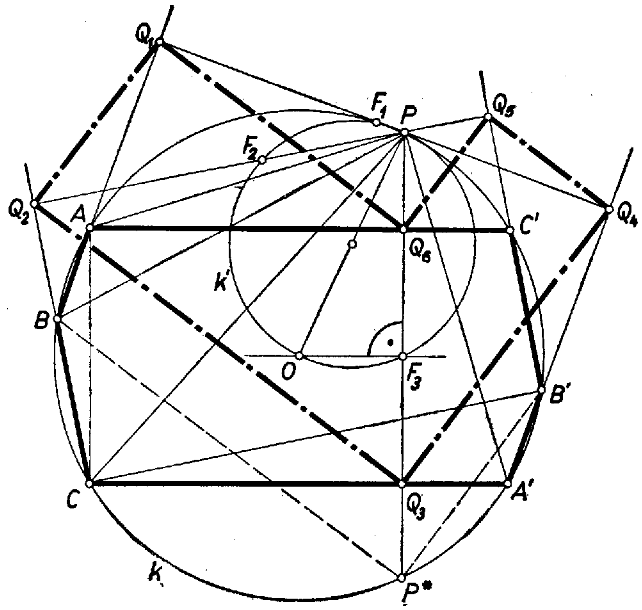


Ezért az állítás első részében elég azt bizonyítanunk, hogy ha L, M, N, L' ebben a sorrendben egy k körnek egymástól különböző pontjai, LL' a k-ban átmérő, és egy a k-n fekvő P-ből az LM, MN, NL' egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre Q, R, S, akkor $QR = q$ és $RS = s$ egymásra merőlegesek. Evégett megmutatjuk egyrészt, hogy P egy bizonyos P_0 helyzetében $Q_0R_0 = q_0$ és $R_0S_0 = s_0$ merőlegesek, másrészt hogy ha P elmozdul a k-n, akkor $QR = q$ és $RS = s$ egymással megegyező irányban ugyanakkora szöggel fordulnak el. (L, M, N és L' sorrendje megfelel H_1 konvexségének.)

Valóban, P_0-ként az M-en átmenő átmérőnek M' másik végpontját véve Q_0 az L-be, R_0 az N-be esik, így $Q_0R_0S_0\sphericalangle = LNS_0\sphericalangle = LNL'\sphericalangle$, és ez a feltevésnél fogva derékszög.



Legyen η az s (előjellel vett) hajlásszöge PR-nek attól a félegyenesétől mérve, amely MN-nek ugyanazon partján van, mint L. Az N, P, R, S pontok P bármely helyzetében húrnégyszöget határoznak meg, ebből látható, hogy η mindig egyenlő a $\varphi = L'NP$ szöggel, de avval ellentétes irányú: $\eta = -\varphi$. Eszerint ha P a P_1 helyzetből P_2-be megy át, akkor a megfelelő s_1-nek s_2-be való δ elfordulási szögét P_1R_1 és P_2R_2 párhuzamossága folytán az $\eta_2 - \eta_1$ különbség adja, és erre $\delta = \eta_2 - \eta_1 = -(\varphi_2 - \varphi_1)$, vagyis s elfordulása egyenlő, de ellentétes irányú NP elfordulásával. (Ez nem a k-n fekvő P-re is érvényes.) – Eredményünk alapján egy P_2-ből szerkesztett q_2-nek egy P_1-ből szerkesztett q_1-hez képest való ε elfordulási szöge is kiadódik: $-(\psi_2 - \psi_1)$, ahol ψ_1 és ψ_2 a $\psi = NMP$ szög megfelelő két értékét jelöli. – Most már P két helyzetének k-n P_0-t és P-t véve $\psi - \psi_0 = P_0MP\sphericalangle = P_0NP\sphericalangle = \varphi - \varphi_0$, eszerint $\varepsilon = \delta$, vagyis q, s a q_0, s_0-hoz képest valóban ugyanannyival és ugyanazon irányban fordulnak el, és ezért $SRQ\sphericalangle = S_0R_0Q_0\sphericalangle$, derékszög, amit bizonyítani akartunk.



H_1 mindegyik szemben fekvő oldalpárja egymással párhuzamos, mert végpontjaik, mint két átmérő végpontjai, egy téglalapnak a csúcsai; ezért a P-ből rájuk bocsátott merőlegesek azonosak, így pl. a P, Q_3, Q_6 ponthármas egy egyenesbe esik. Ezért a Q_3Q_6 szakasz F_3 felezőpontja egyrészt PQ_3-on fekszik, másrészt az $ACA'C'$ téglalapnak az AC-re merőleges tengelyén, amely k-nak átmérője, tehát F_3-ból az OP sugár derékszögben látszik, F_3 az OP átmérőjű k' Thalész-körnek pontja. (Az utóbbi akkor is áll, ha F_3 éppen P-be esik.) Ugyanez áll a Q_1Q_4, Q_2Q_5 szakaszok F_1, F_2 felezőpontjára. Ezzel bebizonyítottuk az állítás második részét, és egyben a szóban forgó második kört közvetlen kapcsolatba hoztuk k-val és P-vel.

II. megoldás: A H_1 hatszög oldalainak merőlegességét a következőképpen is igazolhatjuk. Elegendő P-nek a $C'A$ íven felvehető helyzeteire szorítkozunk mert H_1-nek nincs kitüntetett oldala, így a betűzés megváltoztatásával mindig elérhetjük az említett helyzetet. Másrészt elég az egymást Q_6, Q_1, Q_2, Q_3-ban metsző oldalakra megmutatni, hogy merőlegesek egymásra, mert H_1 csúcsait fordított sorrendben betűzve (A, B, $\ldots$, C' helyére rendre C', B', $\ldots$, A-t írva) Q_5 és Q_1 valamint Q_4 és Q_2 felcserélődnek.

Q_1 mint a PAB háromszög magasság talppontja az AB oldal A-n túli meghosszabbításán van, mert a PAB szög tompaszög, szárai között k-nak a C' és C pontokat tartalmazó, és ezért félkörnél nagyobb PB íve fekszik; hasonlóan Q_2 a BC oldal B-n túli meghosszabbításának pontja. Ezekből a betűzés megfordításával kapjuk, hogy Q_5, Q_4 a $C'B'$, $B'A'$ oldalnak C'-n, B'-n túli meghosszabbításán van. Q_3 viszont a CA' és Q_6 a $C'A$ szakaszon fekszik, mert a PCA', $PC'A$ háromszögekben C-nél és A'-nél, C' és A-nál hegyes szögek vannak. Eszerint P a H_2-höz viszonyítva a Q_6, Q_2, Q_3-nál fekvő (180°-nál kisebb) szögek terében fekszik, és a Q_1-nél, Q_5-nél fekvő egyik-egyik külső szög terében, ezért a Q_1 szög PQ_1 révén két szög különbségeként írható: $Q_6Q_1Q_2\sphericalangle = PQ_1Q_2\sphericalangle - PQ_1Q_6\sphericalangle$ a Q_6, Q_2, Q_3-nál fekvő szögek pedig PQ_6, PQ_2, PQ_3-mal két szög összegére bonthatók, pl. $Q_2Q_3Q_4\sphericalangle = Q_2Q_3P\sphericalangle + PQ_3Q_4\sphericalangle$.

Folytatólag a PQ_1Q_2B és PQ_1AQ_6 „talpponti” húrnégyszögek, majd a $PABC$ „k-beli” húrnégyszög révén (mivel bármelyik szög egyenlő a szemben fekvő szög külső szögével) $Q_6Q_1Q_2\sphericalangle = PBC\sphericalangle - PAC'\sphericalangle = PAC\sphericalangle - PAC' = C'AC\sphericalangle$, és ez feltevésnél fogva derékszög: a CC' átmérő látószöge a k-n fekvő A pontból. – Majdnem ugyanígy halad a bizonyítás a többi három szög esetében is. A megkezdett példát folytatva: $Q_2Q_3Q_4\sphericalangle = BCP\sphericalangle + PA'B'\sphericalangle = BCP\sphericalangle + PCB'\sphericalangle = BCB'\sphericalangle$, ami derékszög. (Olyan, a szereplőkkel egyenlő szögekre térünk át, melyek H_1 csúcsaival vannak meghatározva, majd amelyeknek csúcsuk és egyik száruk közös, és így összegük egyetlen szögként írható.)

Ezzel az állítás első részét bebizonyítottuk.

III. megoldás: Megmutatjuk, hogy H_2-nek egy oldala a tőle számított második oldallal párhuzamos, és a harmadikra merőleges; ebből már következik, hogy a második és a harmadik oldal egymásra merőleges, vagyis az állítás első része igaz. Valóban, egyrészt pl. Q_6Q_1 párhuzamos Q_3Q_2-vel, mert egyenlő szöget alkotnak a Q_6P (másképpen Q_3P) félegyenessel: $PQ_6Q_1\sphericalangle = PAQ_1\sphericalangle = PCQ_2\sphericalangle = PQ_3Q_2\sphericalangle$ továbbá Q_1 és Q_2 a PQ_3 egyenesnek ugyanazon partján feküsznek. Másrészt Q_6Q_1 merőleges Q_3Q_4-re. Ugyanis a Q_6-nál derékszögű PAQ_6 és a Q_3-nál derékszögű $A'PQ_3$ háromszögek hasonlók, mert P-nél fekvő hegyes szögeik PA és PA' merőlegessége folytán egymásnak pótszögei; a PAQ_6 háromszög egy $+90^\circ$ szögű forgatva nyújtással áll elő $A'PQ_3$-ból (megfelelők azok a csúcsok, amelyek a két felsorolásnak ugyanannyiadik tagjai). Ugyanez érvényes a Q_1-nél, Q_4-nél derékszögű PAQ_1 és $A'PQ_4$ háromszögekre is, és így a PQ_6AQ_1, $A'Q_3PQ_4$, négyszögekre is, mert a hasonlóság aránya mindkét esetben ugyanaz: a PA, $A'P$ átfogók aránya. Így Q_6Q_1 is $+90^\circ$-os forgatva nyújtással áll elő Q_3Q_4-ből (ez többet is mond annál, mint amit állítottunk), ennélfogva Q_3Q_2 merőleges Q_3Q_4 -re.

Megjegyzés. Egyenesek párhuzamosságára támaszkodik a következő bizonyítás is. Legyen k és a PQ_6 egyenes második közös pontja P^*. Ekkor $CQ_2Q_3\sphericalangle = CPQ_3\sphericalangle = CPP^*\sphericalangle = CBP^*\sphericalangle$, eszerint P^*B párhuzamos Q_3Q_2-vel. Hasonlóan $P^*B' \parallel Q_3Q_4$, így a $Q_2Q_3Q_4$ szög egyállású a BP^*B' szöggel, ez pedig derékszög.