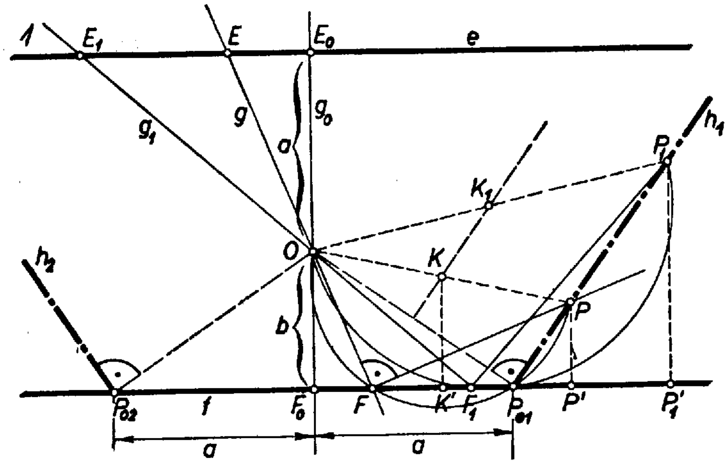
**I. megoldás:** Legyen $g$-nek az $f$-re merőleges helyzete $g_0$, ennek metszéspontjai $e$, $f$-en $E_0$, $F_0$. Ekkor a kérdéses merőleges maga $f$, így az $e$-vel való metszéspont nem létezik, $P$ nem szerkeszthető egyértelműen; azonban $f$-nek $F_0$-tól $OE_0 = a$ távolságra fekvő $P_{01}$ és $P_{02}$ pontjait tágabb értelemben a mértani helyhez tartozóknak tekinthetjük. – Elegendő $g$-nek azon helyzeteivel foglalkoznunk, amelyek $f$-et az $F_0P_{01}$ félegyenesén metszik, mert a mértani helynek az így mellőzött pontjait a figyelembe vettekből $g_0$-ra való tükrözéssel megkaphatjuk, hiszen $g$ minden mellőzött helyzetének megvan a tükörképe a figyelembe vett helyzetek között.




Legyen a forgó egyenesnek egy $g$ helyzetében $OP$ felezőpontja $K$, $P$ és $K$ vetülete $f$-en $P'$, $K'$. Ekkor az $FPP'$ és $OEE_0$ derékszögű háromszögek egybevágók, mert $FP = OE$, továbbá $F$, ill. $O$-nál levő szögeik merőleges szárú hegyes szögek, és ezért egyenlők. Így $FP' = OE_0 = a = F_0P_{01}$ és $F$ a $P'$-től ellentétes irányban van, mint $P_{01}$ az $F_0$-tól (ugyanis az $F_0FP$ szög nagyobb az $OFP$ szögnél, ez pedig derékszög). Ezért $P_{01}$ és $F$ tükrös párok az $F_0P'$ szakasz felező merőlegesére – ami egyben az $OF_0P'P$ trapéz $KK'$ középvonala –, és így $KP_{01} = KF$. Másrészt $K$ az $OFP$ derékszögű háromszög köré írt kör középpontja. Ezek szerint e kör átmegy $P_{01}$-en és ezért az $OP_{01}P$ szög ($g$ bármely helyzete mellett) derékszög; más szóval $P$ csak a $P_{01}$-ben $OP_{01}$-re állított merőlegesen fekhet. Tegyük hozzá: az $FP$ szakaszok felmérési irányára tekintettel $P$ a merőlegesnek csak azon a $h_1$ félegyenesén lehet, amely $f$-nek ugyanazon partján van, mint $e$ (és $O$).

Megmutatjuk, hogy a figyelembe vett $g$ helyzetekre a keresett mértani hely éppen $h_1$, vagyis $h_1$ bármely $P_{01}$-től különböző $P_1$ pontja előáll $g$ valamely helyzetéből.

$g_1$-nek a $P_1$-et előállító helyzetére, ill. a vele adódó $E_1$, $F_1$-re egyrészt a $P_1F_1O$ szögnek derékszögnek, másrészt $F_1P_1 = OE_1$-nek kell lennie. Az első követelményből $g_1$ egyértelműen megszerkeszthető, ehhez $F_1$-et az $OP_1$ átmérőjű (és $P_1P_{01}O\sphericalangle = 90°$ folytán $P_{01}$-en átmenő) Thalész-körnek $f$-fel való, $P_{01}$-től különböző metszéspontja adja – amennyiben két ilyen metszéspont van –, és $F_1 \equiv P_{01}$, ha e kör érinti $f$-et. E kör $K_1$ középpontja rajta van az $F_0P_1'$ szakasz felező merőlegesén ($P_1'$ a $P_1$ vetülete $f$-en), így $F_1$ és $P_{01}$ tükrös pontpár $F_0P_1'$ felezőpontjára, és ezért $F_1P_1' = F_0P_{01} = OE_0$. Így az $OE_1E_0$ és $F_1P_1P_1'$ derékszögű háromszögek egybevágók ($E_1$ a $g_1$ és $e$ metszéspontja), mert $O$, ill. $F_1$-nél fekvő szögük szárai páronként merőlegesek (Thalész-kör), ennélfogva $OE_1 = F_1P_1$ amit bizonyítani akartunk. (Teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy $F_1$ az $F_0P_{01}$ félegyenesen van, mert nem lehet sem $F_0$-ban, sem az $F_0P_{02}$, félegyenesen; ugyanis $F_0$ a körre nézve külső pont, $K_1$ az $OP_0$ szakasz felező merőlegesének azon a félegyenesén van, amely $OP_{01}$-nek $F_0$-val ellentétes oldalára esik, az utóbbinak pontjai pedig $F_0$-tól távolabb vannak, mint $P_{01}$-től.)

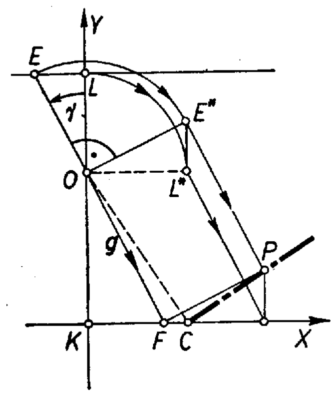
Ezek szerint a keresett mértani helyet $h_1$ és ennek $g_0$-ra való $h_2$ tükörképe adja, vagyis az $f$ egyenes $F_0P_{01} = F_0P_{02} = OE_0$ tulajdonságú $P_{01}$, $P_{02}$ pontjaiban $OP_{01}$, ill. $OP_{02}$-re állított merőlegeseknek azok a félegyenesei, amelyek $f$-nek $O$-t tartalmazó partján vannak. $P_{01}$ és $P_{02}$ a mértani helynek csupán tágabb értelemben vett pontjai.

*Megjegyzések.* 1. $FP' = F_0P_{01}$ megállapítása után – ahol a szakaszok iránya is megegyező –, vizsgálatunkat így is befejezhetjük: eszerint $P_{01}P' = F_0F$, másrészt $PP' = EE_0$, ennélfogva $PP' : P_{01}P' = EE_0 : F_0F = OE_0 : OF_0 = a : b$, azaz állandó, tehát bármely $P$-be $P_{01}$-ből ugyanaz az irány mutat. Így azonban még hátra van ennek az iránynak a meghatározása.

2. Többen pontos rajzú próbák nélkül azt a pusztán szabadkézi vázlatra alapított sejtésüket próbálták igazolni, hogy a mértani hely kör, hiperbola, hiányos parabola, vagy két kotangens-görbe.

A versenyzők nagyobb része a koordináta-geometria módszereivel kereste a mértani hely egyenletét, gyakran elég bonyolult számításokkal, a szakaszfelmérést egyenes és kör metszésének tekintve, ami két lehetőséget ad $P$-re, a helyes irány megválasztása pedig diszkussziót igényel. Alább egy ezt a lépést kikerülő, részben koordináta-geometriai megoldást adunk.

**II. megoldás:** Válasszuk $f$-et $X$-, és a rá $O$-n át húzott merőlegest $Y$-tengelynek úgy, hogy $O$ ordinátája $b$ legyen, és legyen a kezdőpont $K$, továbbá $e$ és az $Y$-tengely metszéspontja $L$. Tekintsük egyelőre azokat a $g$-ket, amelyek az $X$-tengelyt pozitív abszcisszájú $F$-ben metszik, és jellemezzük $g$ helyzetét azzal a $\gamma$ pozitív hegyes szöggel, amellyel $O$ körül az $Y$-tengelyhez képest el van fordulva. Így $F$, $E$ koordinátái: $(b\operatorname{tg}\gamma, 0)$, $(-a\operatorname{tg}\gamma, b+a)$ és a felmérendő $OE = z$ szakasznak az $Y$-tengelyre való vetülete $a$, az $X$-tengely irányára pedig $LE = -a\operatorname{tg}\gamma$.




E szakasz előírt felmérését helyettesíthetjük $O$ körüli $-90°$-os elforgatásával és $O$-nak $F$-be való eltolásával.

Így az elforgatott $OE^*$ vetületei $X$, $Y$ irányára $OL^* = a$, $L^*E^* = a \operatorname{tg} \gamma$, és az eltolás után $P$ koordinátái: $x = b \operatorname{tg} \gamma + a$, $y = a \operatorname{tg} \gamma$. ($f$, $e$ pontjainak ordinátája 0, ill. $b + a > 0$, ennélfogva $OE$-nek $e$ felé való felmérése $P$-re pozitív ordinátát ír elő; valóban $y > 0$, mert $\gamma > 0°$.

A keresett mértani hely eddig tekintetbe vett részének egyenletét $P$ koordinátáiból a $\gamma$ paraméter kiküszöbölésével kapjuk:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x-a}{b} = \frac{y}{a}\text{-ból}: \ y = \frac{a}{b}(x-a),$$

és ehhez járul $\operatorname{tg} \gamma > 0$ helyett az $y/a > 0$, azaz $y > 0$ megszorítás. Ez félegyenes egyenlete, amely az $X$ tengelyt az $x = a$ abszcisszájú $C$ pontban metszi (itt a kezdőpontja) és amely merőleges $OC$-re, mert $OC$ iránytangense $-b/a$.

Hasonlóan kapjuk az $X$-tengelyt negatív abszcisszájú $F$-ben metsző $g$ egyenesekre $F(-b \operatorname{tg} \gamma, 0)$ és $E(a \operatorname{tg} \gamma, b + a)$-ból $P$-re: $x = -b \operatorname{tg} \gamma - a$, $y = a \operatorname{tg} \gamma$ (itt $\gamma$ a $g$ elfordulása $Y$-tól a negatív forgási irányban). Eszerint $P$ abszcisszája az előbbinek $-1$-szerese, ordinátája változatlan, ez az $Y$-tengelyre való tükrözést jelent, ennélfogva a mértani hely hiányzó része az eddigiből az $f$-re $O$-n át húzott merőlegesen való tükrözéssel áll elő.

*Megjegyzések.* 1. A fentiekben nem „tiszta” koordinátageometriai módszerrel dolgoztunk, több lépést elemi, ill. trigonometriai úton végeztünk.

2. $OE$-nek a $g$-re merőlegesen való felmérésével adódó pontot megkaphatjuk a merőleges és a $g$-ből (rá merőleges) $OE$ nagyságú eltolással előálló $g'$ egyenes metszéspontjaként is. Így azonban mindegyik említett egyenes egyenletét fel kellene írnunk, és többet kellene számolnunk. Az „$e$ felé” való eltolás révén a $g'$-vel az $Y$-ból lemetszett szakasz $b$-ről $b + OE/\sin\gamma = b + a/\sin\gamma\cos\gamma$-ra növekszik.