

Ha  $N$  valamilyen  $k$  érték mellett minden  $n$ -re osztható 7-tel, akkor  $n = 1$ -re is osztható, tehát

$$(1) \quad 3^5 - 2k + 1 = 244 - 2k = 7m.$$

Itt a bal oldal páros, tehát a jobbnak is párosnak kell lennie. Ez akkor és csak akkor áll fenn, ha  $m$  páros:  $m = 2m_1$ . Így  $k$ -ra azt kapjuk, hogy

$$k = 122 - 7m_1 = 7(17 - m_1) + 3 = 7m_2 + 3.$$

Itt  $m_2$  tetszés szerinti egész értéke mellett fennáll (1) az  $m = 34 - 2m_2$  értékkel.

Megmutatjuk másfelől, hogy  $N$  minden  $n$ -re 7-tel osztható számmal tér el az  $n = 1$ -hez tartozó értéktől. Valóban

$$N - (3^5 - 2k + 1) = 3^5(3^{6(n-1)} - 1) - 2k(2^{3(n-1)} - 1),$$

és a jobb oldal első különbsége osztható  $3^6 - 1 = (3^3 - 1)(3^3 + 1) = 26 \cdot 28$ -cal, tehát 7-tel is, a második tag pedig osztható  $2^3 - 1 = 7$ -tel, így az egész különbség is.

Azt kaptuk tehát, hogy  $N$  akkor és csak akkor osztható minden  $n$ -re 7-tel, ha ez az  $n = 1$ -hez tartozó értékére teljesül, ehhez pedig szükséges és elegendő is, hogy  $k$  7-tel osztva 3-at adjon maradékul.