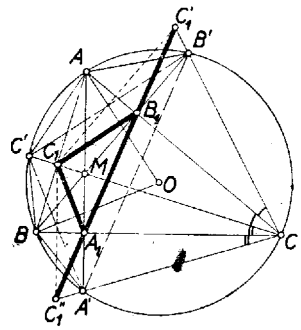
I. megoldás: Legyenek az ABC hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontjai rendre A_1, B_1, C_1. Ezek belső pontjai a BC, CA, ill. AB szakasznak. Ismeretes, hogy hegyesszögű háromszögben az oldalak felezik a talpponti háromszög külső szögeit.



Ennélfogva ha C_1-nek CA, ill. CB-re vonatkozó tükörképe C_1', ill. C_1'', akkor a B_1C_1 ill. A_1C_1 oldalnak B_1C_1', ill. A_1C_1'' tükörképe a B_1A_1 oldalnak B_1, ill. A_1-en túl való meghosszabbítására esik, tehát $C_1'C_1''$ a talpponti háromszög k kerületével egyenlő. Továbbá a tükrözés folytán a $C_1'CC_1''$ háromszög egyenlő szárú: $CC_1' = CC_1 = CC_1'' = m_c$, és C-nél levő szöge kétszerese az ACB hegyes szögnek. – Az ABC háromszög körülírt körének O középpontja az A, B csúcsokkal együtt a $C'CC_1''$-höz hasonló háromszöget alkot, mert $OA = OB = r$, és $AOB\sphericalangle = 2 \cdot ACB\sphericalangle$. A hasonlóság folytán: $C'C_1'' : AB = CC_1' : OA$, másképpen $k : c = m_c : r$, és ebből $cm_c = rk$, ahol a bal oldal az eredeti háromszög t területének kétszerese. Így $t = rk/2$, amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés. Derékszögű háromszögben a talpponti háromszög elfajul, mert két csúcsa egybeesik a derékszög csúcsával, pl. ha $ACB\sphericalangle = 90°$, akkor $A_1 \equiv B_1 \equiv C$. Ha a CC_1 szakaszt oda-vissza bejárva elfogadjuk, a „háromszög" „kerületének", akkor a tétel ez esetben is igaz, mert $k = 2m_c$, másrészt $r = c/2$, ennélfogva $kr/2 = cm_c/2 = t$.

A bizonyításban felhasznált hasonlóság tompaszögű háromszögben is fennáll – éspedig akár hegyes szög van C-nél, akár tompa (természetesen bizonyítása kissé módosul), de a $C_1'C_1''$ szakasz nem a talpponti háromszög k kerületét jelenti, hanem a $k - 2h$ különbséget, ahol h a talpponti háromszögnek az az oldala, amelynek végpontjai az eredeti háromszög hegyes szögeinek csúcsából húzott magasságok talppontjai. A módosulás magyarázata az, hogy ez esetben csak a leghosszabb oldal egyenese tartja meg a talpponti háromszögben külső szögfelezői szerepét, a másik kettőé belső szögfelezővé válik.

II. megoldás: Ismeretes, hogy a háromszög M magasságpontjának az oldalakra, más szóval az A_1, B_1, C_1 magasságtalppontokra való A', B', C' tükörképei a körülírt kör kerületén vannak (A' a CC_1'' egyenesen, B' a CC_1'-n). Így az $A'B'C'$ háromszög az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögnek az M középpontból 2-szeresre nagyított képe – mert (pl.) A' az MA_1 egyenesen van –, és $MA_1 = A_1A'$-ből $MA' = 2MA_1$. Eszerint (pl.) $B'C' = 2B_1C_1$. – Hegyesszögű háromszögben az M belső pont, ezért tükörképei az A-t, B-t, C-t nem tartalmazó BC, CA, ill. AB ívre esnek. Az $AC'BA'CB'$ (konvex) hatszög területe 2-szerese az ABC háromszög t területének, mert annál az ABC', BCA', CAB' háromszögek együttes területével nagyobb, ez pedig egyenlő t-vel, mert tükörképeik: ABM, BCM, CAM éppen kitöltik ABC-t.

E hatszögnek az A, B, C csúcsokba befutó oldalpárjai egyenlők, mert pl. $CA' = CM = CB'$, tehát a körülírt kör OA', OB', OC' sugaraival való felbontással területét 3 deltoid területének összegeként is előállíthatjuk:

$$2t = \frac{OA \cdot B'C'}{2} + \frac{OB \cdot C'A'}{2} + \frac{OC \cdot A'B'}{2} = rB_1C_1 + rC_1A_1 + rA_1B_1 =$$
$$= r(B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1) = rk.$$

Evvel igazoltuk a bizonyítandó állítást.

Megjegyzés. Derékszögű háromszögben $M \equiv C \equiv A' \equiv B'$, így a hatszög elfajul, tompaszögű háromszög esetén pedig hurkolttá válik.