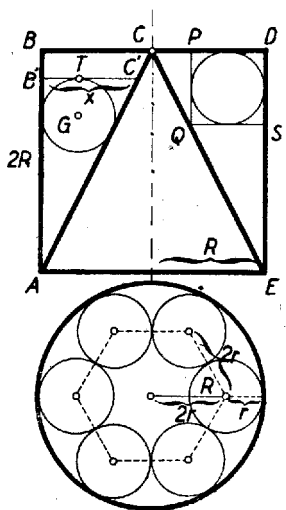


I. megoldás: A henger és a kúp közös tengelyén átmenő bármely $ABCDE$ síkmetszetben az AB henger- és az AC kúpalkotó ugyanakkora BAC szöveget zár be. Így r sugaraik egyenlősége folytán mind a 6 gömb középpontja ugyanolyan mélyre esik le, középpontjaik egy vízszintes síkban helyezkednek el. Ezek nyilván egy olyan $2r$ oldalú szabályos hatszög csúcsai, amelynek középpontja a henger tengelyén van, ezért a gömbközpontoknak a tengelytől való távolsága ugyancsak $2r$, a henger falától való távolságuk r ; így a henger (és a kúp) sugara: $R = r + 2r = 3r$.



Tekintsünk egy olyan tengelymetszetet, amely átmegegy gömbnek G középpontján. A gömbből így kimetszett főkör érinti az AB , ill. AC alkotókat. Tekintsük e főkör érintőjét a gömb legmagasabban fekvő T pontjában, és jelöljük ennek az alkotók (vagy meghosszabbításaik) közti szakaszát $B'C' = x$ -szel. Így adataink alapján az $AB'C'$ derékszögű háromszögben $AB' = 2x$, $AC' = \sqrt{5}x$. A főkör ezen háromszögnek beírt köre, ennél fogva szokásos jelölésekkel és az ismert összefüggés alapján:

$$r = \frac{t}{s}, \quad \text{azaz} \quad r = \frac{x^2}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{x}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Ennek alapján

$$\frac{x}{R} = \frac{3 + \sqrt{5}}{6} < \frac{2 + \sqrt{9}}{6} = 1,$$

és mivel R pozitív, azért $x < R$. Eszerint $B'C' < BC$, és az $AB'C'$ és ABC háromszögek hasonlósága alapján $AB' < AB$, tehát T alatta van a fedőlap BD szintjének, a gömbök nem emelkednek ki az edényből.

II. megoldás: Ha már megkaptuk az $r = R/3$ összefüggést, akkor szinte számítás nélkül is válaszolhatunk a kérdésre a következő átfogalmazás alapján:

Beilleszthető-e egy gömb az edénybe (a kúp után) úgy, hogy érintse a henger falát és legmagasabb pontja a fedőlap szintjében legyen? Látható, hogy igen. Ugyanis a gömb főkörmeteszét befoglalva egy $2r$ oldalú $DPQS$ négyzetbe, ennek az a Q csúcsa, amely sem a hengeralkotón, sem a fedőlappal való metszésvonalon nincs rajta, éppen a kúp alkotójára esik; ez mutatja, hogy az ilyen beillesztésnek nincs akadálya, ebből a helyzetből eleresztve a gömb lejjebb esik, vagyis még a fedőlap szintjét sem éri el a legmagasabb pontja.