I. megoldás: Mindkét ismeretlen értéke csak a 0, ±1, $\pm2, \ldots, \pm999$ számok egyike lehet, de az egyik értékének megválasztása korlátozást jelent a másikéra. Menjünk végig x minden egyes értékén, és állapítsuk meg a mellette lehetséges, vele megoldást adó y-értékek számát; kérdésünkre ezen számok összege adja meg a választ. – Vegyük először x nemnegatív értékeit.

$x = 0$ mellett $|y| < 1000$, azaz $-1000 < y < 1000$, ennek -999, $-998, \ldots, -1$, 0, $1, \ldots, 999$ tesznek eleget, számuk $2 \cdot 999 + 1 = 1999$.

$x = 1$ mellett $|y| < 999$, az előbbinél 2-vel kevesebb megoldás van, mert $y = \pm999$ már nem felel meg.

Általában is, x valamely értékéről az 1-gyel nagyobbra áttérve $|y|$-nek legnagyobb lehetséges értéke 1-gyel kisebbnek adódik, így y előbbi értékei közül kettőt kell törölnünk, az x, y megoldások száma 2-vel csökken. Így a megoldások számai $x = 0, 1, 2, \ldots, 999$-re számtani sorozatot alkotnak. Az utolsó tag $x = 999$-cel $: 1$, a tagok száma 1000, és így összegük:

$$\frac{1000(1999 + 1)}{2} = 1000^2.$$

$x = -1$, $-2, \ldots, -999$ esetén $|x| = 1, 2, \ldots, 999$, így az előzőkhöz hasonlóan az ilyen megoldások együttes száma

$$1997 + 1995 + \ldots + 1 = 999^2.$$

Ezzel valamennyi megoldást figyelembe vettük, összes számuk: $1000^2 + 999^2 = 1\,998\,001$.

II. megoldás: A kérdés egyértelmű a következővel: hány olyan x, y egész számpár van, amelyre az $|x| + |y|$ összeg vagy 0-val, vagy 1-gyel, vagy 2-vel, …, vagy 999-cel egyenlő? Állapítsuk meg tehát általában az $|x| + |y| = k$ egyenlet egész számokban való megoldásainak N_k számát, – ahol k nemnegatív egész szám –, és képezzük ezek összegét $k = 0$, 1, 2, …, 999-re.

$k = 0$ esetén egy megoldás van: $x = y = 0$.

$k = 1$ esetén négy megfelelő értékpár van:

$1, 0$; $\quad -1, 0$; $\quad 0, 1$; $\quad 0, -1$.

$k \geq 2$ esetén a megoldásokat két csoportba osztjuk aszerint, hogy fellép-e bennük a 0 szám, vagy nem. Az elsőbe a $k = 1$ esethez hasonlóan 4 megoldás jut: $k, 0$; $-k, 0$; $0, k$; $0, -k$. A második csoportban $|x|$ a következő $k - 1$ értéket veheti fel:

$$|x| = j \quad = \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots, k-1,$$

és evvel $|y|$ is meg van határozva:

$$|y| = k - j = k - 1,\ k - 2,\ k - 3, \ldots, 1.$$

j minden fenti értékével az előjelek figyelembevétele során $2 \cdot 2 = 4$ megoldás adódik, mert j és $k - j$ mindegyike számára egymástól függetlenül 2-féleképpen választhatjuk az előjelet:

$$j, k - j; \quad -j, \quad k - j; \quad j, -(k - j); \quad -j, -(k - j),$$

tehát itt a megoldások száma $4(k - 1)$. – Végeredményben $k \geq 2$ esetén a megoldások száma $4 + 4(k - 1) = 4k$. Ez a kifejezés $k = 1$ esetén is helyes, ekkor a második csoportba nem tartozik megoldás; $k = 0$-ra azonban nem érvényes.

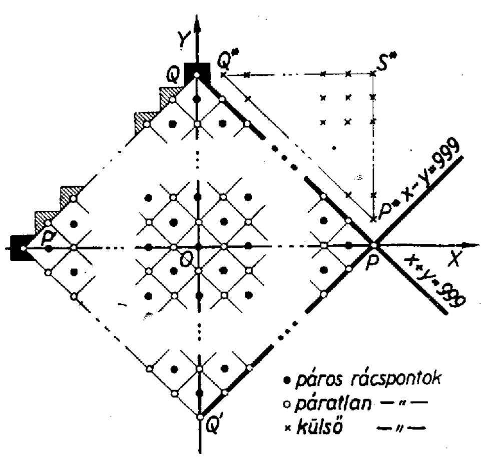
Ezek után $k = 0$, 1, 2, …, 999-re

$$N = 1 + 4(1 + 2 + 3 + \ldots + 999) = 1 + 4 \cdot \frac{999 \cdot 1000}{2} = 1\,998\,001.$$

Megjegyzés. Ugyanígy, ha s nemnegatív egész szám, akkor az $|x| + |y| < s$ egyenlőtlenség megoldásainak száma egész számokban:

$$N_s = 1 + 4\big[1 + 2 + 3 + \ldots + (s - 1)\big] = 2s^2 - 2s + 1.$$

III. megoldás: Minden egyes megoldást a derékszögű koordinátarendszerben egy ún. rácspont ábrázol, vagyis olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám. Jellemezzük e rácspontok helyzetét, majd ennek alapján számukat megállapítva adjunk választ kérdésünkre.



Az adott egyenlőtlenség így is írható:

$$|x|+|y|\leq 999.$$

Tekintsük átmenetileg csak azokat a megoldásokat, amelyekben x és y egyike sem negatív. Így $|x|=x$ és $|y|=y$, teljesül tehát

(1) $$x\geq 0,\quad y\geq 0\quad \text{és}\quad x+y\leq 999.$$

Az ezen korlátozásoknak eleget tevőrácspontok nem lehetnek az $x=0$ egyenestől (az Y-tengelytől) balra, az $y=0$-tól (X-tengely) lefelé, és az $x+y=999$ egyenestől „jobbra fölfelé”. Más szóval: (1)-nek csak az ezen három egyenessel bezárt OPQ derékszögű háromszög csúcsaiban, oldalszakaszain és belsejében fekvő rácspontok tehetnek eleget, ahol O, P és Q koordinátái: $(0,0)$, $(999,0)$ és $(0,999)$.

Fordítva: ha valamely x, y rácspont eleget tesz ezen geometriai előírásoknak, akkor az x, y számpárra, továbbá – negatív értékeket ismét megengedve – vele együtt a $-x$, y, az x, $-y$ és a $-x$, $-y$ párokra is teljesül az adott egyenlőtlenség. Az utóbbi számpároknak megfelelő rácspontok azoknak az $OP'Q$, OPQ', ill. $OP'Q'$ háromszögeknek a kerületén és a belsejében vannak, amelyek OPQ-ból az Y-ra, X-re, ill. O-ra való tükrözéssel keletkeznek. A négy háromszög együtt hézagtalanul kitölti a $PQP'Q'$ négyzetet, ahol $P'(-999,0)$ és $Q'(0,-999)$.

Számuk megállapítása céljára e négyzet rácspontjait többféleképpen rendezhetjük.

a) Valamelyik tengellyel, pl. az Y-nal párhuzamos sorok (rácsegyenesek) szerinti számlálással lényegében az I. megoldást ismételjük. – Hasonlóan a II. megoldás is értelmezhető pontszámlálásként, meggondolásunkat a $PQP'Q'$-höz hasonló helyzetű azon négyzetek kerületein való számlálás szemlélteti, melyeknek közös középpontja O, és átlója rendre 2, 4, 6, …, 1998 egység, és ehhez hozzávesszük az origót. (x, y-on valós számokat értve pl. $|x|+|y|=999$ a $PQP'Q'$ négyzet kerületének egyenlete.)

b) A $PQP'Q'$ négyzet oldalaival párhuzamos rácsegyenesek mentén való számlálásban célszerű a rácspontokat két csoportra, páratlanokra és párosakra osztani az $x+y$ összeg páratlan, ill. páros volta szerint, és a számlálást csoportonként végezni. Ugyanis PQ vagy PQ' irányú mozgással sem páros rácspontból páratlanba nem lehet átjutni, sem fordítva, így a pontok e két irányra nézve nem egyszerű hálót alkotnak, számuk nem állapítható meg puszta szorzással. Valóban, a PQ irányú egyenesek egyenlete $x+y=c$ alakú, ahol c állandó, tehát ezeken mozogva $x+y$ párossága is változatlan; és ugyanez áll PQ' irányú egyenesen való mozgás esetén is, mert egyenletük $x-y=d$ alakú, ahol d állandó, és két egész szám különbsége ugyanolyan párosságú, mint az összege. – Minden rácspont vagy páros, vagy páratlan. Könnyen belátható, hogy páratlan rácspontjaink PQ és PQ'-vel párhuzamosan ezer-ezer sort alkotnak, számuk 1000^2, a párosaké pedig hasonlóan 999^2.

c) Rácspontjaink számát különbségként is megkaphatjuk: véve a P és P', ill. Q és Q' pontokon át az Y, ill. X-tengellyel párhuzamos egyenesek által határolt négyzet $1999^2=3\,996\,001$ rácspontját, és ebből elhagyva a $PQP'Q'$-négyzeten kívül, a négy sarki háromszögben fekvőket, mint számunkra feleslegeseket. Ez utóbbiak együttes száma $4(1+2+\ldots+999)=1\,998\,000$. A jobb felső ilyen háromszög csúcsai: $P^*(999,1)$, $Q^*(1,999)$ és $S^*(999,999)$. Így $N=3\,996\,001-1\,998\,000=1\,998\,001$.

d) A rácspontok száma területszámítás útján is megállapítható. Rendeljük hozzá minden R rácsponthoz annak az egységnyi oldalú „elemi” négyzetnek a területét, amelynek középpontja R és oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Így – ha valamely, a koordinátarendszerben fekvő idom területe csupa ilyen négyzetre bontható fel, – akkor annyi rácspontot tartalmaz, ahány egységnyi a területe. – Vegyük hozzá a $PQP'Q'$ négyzethez a kerületén fekvő rácspontokhoz tartozó elemi négyzeteknek a $PQP'Q'$-n kívül fekvő részeit, így egy „fogazott négyzetet” kapunk. A P, Q, P', Q' rácspontok elemi négyzetéből egyenkint $3/4$ területegységnyi rész fekszik „kívül”, összesen 3 egység, a PQ, QP', $P'Q'$, $Q'P$ oldalszakaszok belsejében fekvő $4\cdot 998=3992$ rácspontéból pedig egyenkint $1/2$ területegységnyi rész, összesen 1996 egység. Mivel még $\overline{PQ}=999\sqrt{2}$, azért a fogazott négyzet területe $2\cdot 999^2+3+1996=1\,998\,001$ egység, megegyezésben fentebbi eredményünkkel.