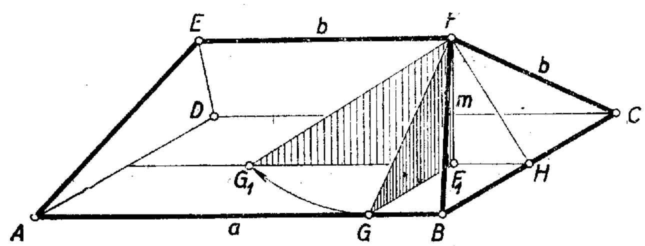
A leírt test négyzetlapja legyen $ABCD$. A testnek van egy ennek valamelyik oldalával, mondjuk AB-val párhuzamos EF éle, melynek merőleges vetülete a négyzet AB-vel párhuzamos középvonalára esik és azon szimmetrikusan helyezkedik el.



Legyen F merőleges vetülete a négyzetlapon, a négyzet AB, ill. BC oldalán rendre F_1, G és H, jelöljük a négyzet oldalaitól különböző egyenlő élek hosszát b-vel, az FF_1 távolságot m-mel. Az FF_1 szakasz merőleges F_1G-re és F_1H-ra is, így az FF_1G háromszöget beforgathatjuk körülötte az EFH síkba, ekkor G egy a HF_1 egyenesen fekvő G_1 pontba kerül. A *c)* feltétel szerint az FG_1H háromszög F-nél derékszögű, FF_1 pedig a háromszög magassága. Így a magasságra vonatkozó középarányossági tétel szerint, mivel $F_1G = a/2$ és $F_1H = (a-b)/2$,

$$m^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a-b}{2}. \tag{1}$$

Számítsuk ki az $ABFE$ trapéz AF átlóját, mint a páronként merőleges AG, GF_1, F_1F szakaszokból alkotható téglatest testátlóját. Az EB átló és a $GDEF$ trapéz átlói szimmetria okokból ugyanekkorák. Felhasználva (1)-et is, azt kapjuk, hogy

$$AF^2 = AG^2 + GF_1^2 + F_1F^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \\ + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a(a-b)}{4} = \frac{1}{4}(3a^2 + ab + b^2).$$

A feladat állításához azt kell tehát belátnunk, hogy $ab + b^2 = a^2$. Az a és b élhosszak közt tudunk egy összefüggést kapni, ha felírjuk Pythagoras tételét FB-re, mint annak a téglatestnek átlójára, melynek egyik lapja BGF_1H és egyik további csúcsa F. Felhasználva (1)-et is:

$$b^2 = FB^2 = BH^2 + HF_1^2 + F_1F^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{a(a-b)}{4} =$$

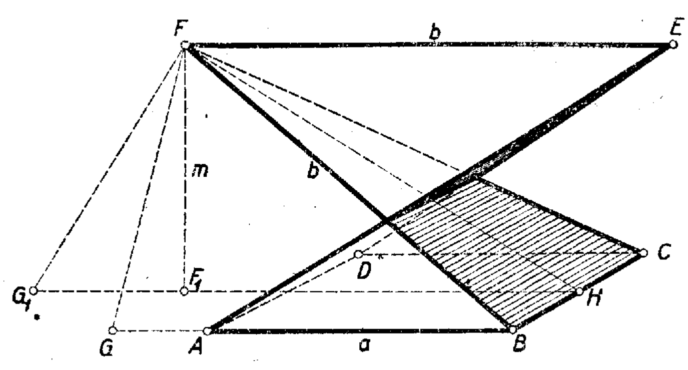
$$= \frac{1}{4}\left(3a^2 - 3ab + b^2\right).$$

A b-t tartalmazó tagokat a bal oldalra rendezve és 3-mal osztva innen valóban

$$ab + b^2 = a^2$$

adódik és ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzések: 1. Az utolsó egyenletből b-re két érték adódik: $a\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ és $-a\left(\sqrt{5}+1\right)/2$. Mint egy versenyző, *Kalmár Ágota*, megjegyezte, a negatív gyöknek is lehet geometriai jelentést tulajdonítani. Ennek egy önmagát átmetsző test felel meg: a két háromszöglap áthatol egymáson, a másik két oldallap pedig hurkolt trapéz lesz $a\left(\sqrt{5}+1\right)/2$ oldalhosszúsággal.



Ugyanekkora az alaplappal párhuzamos él is, míg a trapézok átlói (amelyek most a hurkolt trapézon kívül húzódnak) a hosszúságúak.

2. Helyezzük a feladatban szereplő testet egy kocka fölső vízszintes $ABCD$ lapjára (EF legyen AB-vel párhuzamos), majd az $ABRS$-re is helyezzük el a test egy példányát úgy, hogy az EF-nek megfelelő él AS-sel legyen párhuzamos. Ekkor az AB-hez csatlakozó háromszög és trapéz lap a lapszögekre tett kikötés szerint egy síkba esik és egy egyenlő oldalú ötszöget alkot, amely az EF felezőmerőlegesére szimmetrikus. A többi kockalapokra is elhelyezhetjük a test egy-egy példányát úgy, hogy egy 12 egybevágó, egyenlő oldalú ötszög határolta poliédert kapjunk. Belátható (erre még visszatérünk), hogy a kapott test egy szabályos dodekaéder.