I. megoldás: Azt kell vizsgálnunk, mikor állhat fenn egész x, y értékekre

$$x^2 + ax + b = y^2.$$

Innen x-et meghatározva

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 4y^2}}{2}, \tag{1}$$

és ez csak úgy adhat egész értéket, ha a négyzetgyökjel alatt teljes négyzet áll:

$$a^2 - 4b + 4y^2 = z^2$$

Innen

$$z^2 - 4y^2 = (z + 2y)(z - 2y) = a^2 - 4b.$$

A jobb oldalon állandó érték áll; így ha y is, z is természetes szám, akkor ez az egyenlőség csak olyan értékekre állhat fenn, amelyekre $2y + z$ nem nagyobb ennél az állandó értéknél. Ilyen y, z számpár csak véges sok van. Minden y értékhez (1) szerint legfeljebb két x érték tartozik, tehát csak véges sok olyan egész x érték lehet, amelyre $x^2 + ax + b$ négyzetszám, ha $a^2 - 4b \neq 0$.

Ha viszont $a^2 - 4b = 0$, akkor

$$x^2 + ax + b = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2,$$

tehát a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés: A tárgyalt második esetben $b = \dfrac{a^2}{4}$ csak úgy lehet egész szám, ha a páros. Ebben az esetben az adott másodfokú kifejezés egy egész együtthatós elsőfokú polinom négyzete, s így *minden* egész x értékre négyzetszámot állít elő.

II. megoldás: Kényelmesebb lesz az adott kifejezés négyszeresét vizsgálni. Ez is négyzetszámot állít elő, ha az adott polinom értéke négyzetszám, de fordítva is: a polinom egész helyen mindig egész számot állít elő, s így a négyszerese mindig páros számot. Ha ez a néggyel szorzott érték négyzetszám, akkor páros szám négyzetének kell lennie, s így a negyedrésze, vagyis az eredeti polinom értéke is egész szám négyzete. Elegendő tehát a polinom négyszeresét vizsgálni:

$$4x^2 + 4ax + 4b = (2x + a)^2 + 4b - a^2.$$

Ha ez egy y egész szám négyzete, akkor

$$4b - a^2 = y^2 - (2x + a)^2 = (y + 2x + a)(y - 2x - a).$$

Azonban egy egész szám a 0 kivételével csak véges sok féleképpen bontható két egész szám szorzatára, egy-egy felbontás pedig már egyértelműen meghatározza x-et és y-t.

Így az adott kifejezés csak akkor vehet fel végtelen sok egész x értékre négyzetszámot, ha $4b - a^2 = 0$, ekkor

$$4x^2 + 4ax + 4b = (2x = a)^2$$

és ennek negyedrésze ugyancsak egy elsőfokú polinom négyzete. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Megjegyzés: Mint láttuk, ha végtelen sok helyen állít elő a polinom négyzetszámot, akkor minden egész x-re négyzetszám az értéke, tehát eredményünk így fogalmazható: ha egy a feladatban adott alakú polinom értéke minden egész x-re négyzetszám, akkor a polinom egy polinom négyzete. Ez az állítás már sokkal általánosabban igaz, nemcsak a legmagasabb fokú tagnak adhatunk együtthatót, hanem a fokszámra sem kell kikötést tennünk. Érvényes a következő tétel: Ha egy egész együtthatós polinom értéke minden egész helyen négyzetszám, akkor a polinom egy polinom négyzete. A tétel négyzet helyett tetszés szerinti egész k-val k-adik hatványokra is igaz.

Az viszont lényeges, hogy ne csak végtelen sok egész helyre tegyünk feltételt, mert amint a legmagasabb együtthatóról nem kötjük ki, hogy 1 legyen, akkor már van olyan másodfokú polinom is, amelyik nem teljes négyzet, és végtelen sok egész helyen vesz fel négyzetszámot értékül.