I. megoldás: Fejezzünk ki minden szögfüggvényt x szögfüggvényeivel:

$$\sin x + \sin 2x = \sin x + 2\sin x\cos x = \sin x(1+2\cos x),$$
$$\sin 3x = \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x = \sin x(2\cos^2 x - 1) + 2\sin x\cos^2 x =$$
$$= \sin x(4\cos^2 x - 1) = \sin x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1),$$
$$1+\cos x + \cos 2x = 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 = \cos x(1+2\cos x).$$

Mind a három kifejezésben szerepel az $1+2\cos x$ tényező. A két oldal különbségét képezve és ezt a tényezőt kiemelve

$$(1+2\cos x)\big[\sin x + \sin x(2\cos x - 1) - \cos x\big] =$$
$$= (1+2\cos x)(2\sin x\cos x - \cos x) = (1+2\cos x)(2\sin x - 1)\cos x.$$

Ez a kifejezés úgy lehet 0, ha $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, vagy $\sin x = \dfrac{1}{2}$ vagy $\cos x = 0$, tehát a következő szögekre:

$$\begin{array}{lll} x = 120^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & x = 240^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & \\ x = 30^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & x = 150^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ x = 90^\circ \pm k\cdot 360^\circ, & x = 270^\circ \pm k\cdot 360^\circ. & \end{array}$$

Megjegyzés: Igyekeztünk a föntiekben a legismertebb átalakításokkal érni célhoz, azonban sok más módon is átalakíthatjuk az egyenletet. Ha felhasználjuk pl. a bal oldalon a

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggést,[1] akkor a

$$\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x$$

átalakítás után gyorsabban adódik az $1+2\cos x$ tényező kiemelhető volta és az egyenlet további átalakítása.

II. megoldás: Vizsgáljuk általánosabban tetszőleges n természetes számra a $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(n-1)x$ egyenletet. Ismeretes, hogy a bal oldal is, a jobb oldal is zárt alakra hozható, pl. úgy, hogy megszorozzuk $2\sin\dfrac{x}{2}$-vel. Felhasználva a könnyen igazolható

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \tag{1}$$

és

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta-\alpha) \tag{2}$$

azonosságokat, azt kapjuk, hogy

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx) = 2\sin\frac{x}{2}\sin x +$$
$$+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 3x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3}{2} +$$
$$+\cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x + \cos\frac{5}{2}x - \cos\frac{7}{2}x + \ldots + \cos\frac{2n-1}{2}x -$$
$$-\cos\frac{2n+1}{2}x = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x;$$

másrészt

$$2\sin\frac{x}{2}\big[1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(n-1)x\big] = 2\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos x +$$
$$+2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos(n-1)x = 2\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} +$$
$$+\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x + \ldots + \sin\frac{2n-1}{2}x - \sin\frac{2n-3}{2}x = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{2n-1}{2}x.$$

A kapott kifejezések ugyancsak az (1), ill. (2) azonosságok segítségével – azokat ellenkező irányban alkalmazva – szorzattá alakíthatók, ha (1)-ben α-t és β-t úgy választjuk, hogy $\alpha-\beta = \dfrac{x}{2}$, $\alpha+\beta = \dfrac{2n+1}{2}x$ legyen, illetőleg (2)-ben úgy, hogy $\alpha+\beta = \dfrac{2n-1}{2}x$, $\alpha-\beta = \dfrac{x}{2}$ legyen.

[1] Ez könnyen igazolható, ha a bal oldalon α-t és β-t a jobb oldalon szereplő szögek összege, illetőleg különbségeként írjuk.

Az első esetben $\alpha = \frac{n+1}{2}x$, $\beta = \frac{n}{2}x$ és így

$$\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x = 2\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x;$$

a második esetben $\alpha = \frac{n}{2}x$, $\beta = \frac{n-1}{2}x$, és így

$$\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{2n-1}{2}x = 2\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n-1}{2}x.$$

Egyenletünket tehát, ha még 2-vel osztunk, a következő alakra hoztuk:

$$\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x = \sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n-1}{2}x.$$

Mivel átalakítás közben szoroztunk $\sin\frac{x}{2}$-vel, ennek a gyökeit, tehát az $x = k\cdot 360^\circ (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ szögeket külön meg kell vizsgálnunk. Ezekre az eredeti egyenlet bal oldalán 0 áll, a jobb oldalon viszont n darab 1-es összege, ezek tehát az eredeti egyenletnek nem gyökei, ezeket a továbbiakban kizárjuk.

Redukáljuk a nyert egyenletet 0-ra, és igyekezzünk szorzattá alakítani a két oldal különbségét:

$$\begin{gathered}
0 = \sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n+1}{2}x - \cos\frac{n-1}{2}x\right) = \sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{x}{2} + \right.\\
\left. + \cos\frac{n}{2}x\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{n}{2}x\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{n}{2}x\sin\frac{x}{2}\right) = \\
= \sin\frac{n}{2}x\left\{\sin\frac{n}{2}x\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \cos\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\right\} = \\
= \sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n}{2}x - \cos\frac{n}{2}x\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right).
\end{gathered}$$

Itt az első tényező 0-helyei azok a szögek, amelyekre

$$\frac{n}{2}x = k\cdot 180^\circ, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{k\cdot 360^\circ}{n}, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;$$

a második, illetőleg harmadik tényező akkor tűnik el, ha

$$\frac{n}{2}x = 45^\circ + k\cdot 180^\circ,\ \text{ill.}\ \frac{x}{2} = 45^\circ + k\cdot 180^\circ,$$

tehát az

$$x = \frac{90^\circ}{n} + \frac{k\cdot 360^\circ}{n}, \quad \text{ill.} \quad x = 90^\circ + k\cdot 360^\circ \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

szögekre. A lényegesen különböző szögeket különválasztva és az első csoportból a föntebb kizárt $k\cdot 360^\circ$ alakú szögeket elhagyva azt kapjuk, hogy az egyenlet

$$\left.\begin{aligned}
&x = r\frac{360^\circ}{n} + k\cdot 360^\circ, && r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\\
&x = \frac{90^\circ}{n} + s\frac{360^\circ}{n} + k\cdot 360^\circ, && s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\\
&x = 90^\circ + k\cdot 360^\circ &&
\end{aligned}\right\} k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

A kitűzött feladatot jelentő $n = 3$ esetben a 120° és 240° (és az ezektől nem lényegesen különböző szögek) a gyökök első csoportjából adódnak, 30° és 150° a második csoportból $s = 0,\ 1$ esetén, 90° az utolsó gyök, míg 270° ismét a gyökök második csoportjából adódik $s = 2$ esetén.

Megjegyzések: A II. megoldásban tárgyalt általánosítást egy versenyző, Németh József felvetette és megoldotta.

A 90° felléphet a gyökök első csoportjában is $\left(\text{akkor, ha } n \text{ osztható 4-gyel és } r = \frac{n}{4}\right)$, továbbá a gyökök második csoportjában $\left(\text{ha } n\ 4l+1 \text{ alakú és } s = l = \frac{n-1}{4}\right)$. Ezekben az esetekben 90° az egyenletnek kétszeres gyöke.