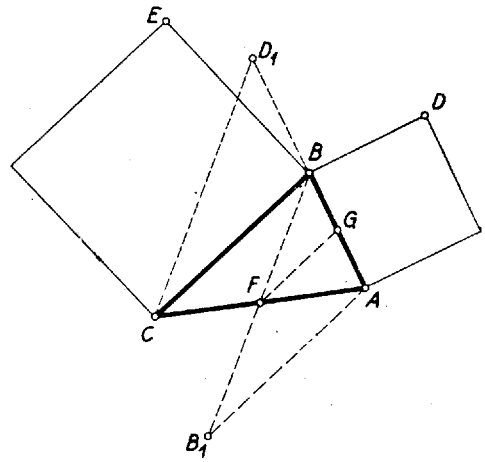
I. megoldás: Legyenek a B-ből induló és AB-re, illetve BC-re merőleges négyzet oldalak BD és BE. Forgassuk el a BDE háromszöget B körül $90°$-kal úgy, hogy E a C pontba kerüljön. Ekkor BD az AB oldal meghosszabbításába kerül és azzal egyenlő BD_1 szakaszt alkot.



1. ábra

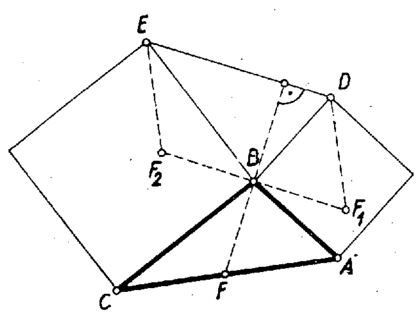
Ennek folytán, ha meghúzzuk az ABC háromszög B-ből induló BF súlyvonalát, az egyben az ACD_1 háromszög középvonala is lesz, s így az ED-vel egyenlő CD_1 szakasz a BF súlyvonal kétszerese, a feladat állításának megfelelően. Hasonlóan járhatunk el a hatszög másik két szóbajövő oldalával is.

Megjegyzések: 1. Azt is tudjuk, hogy BF párhuzamos a CD_1 oldallal, s így ED, amiből CD_1 egy $90°$-os elforgatással keletkezett, merőleges is a BF súlyvonalra.

Nem egy versenyző észrevette ezt a merőlegességet, de sajnos, fennállását a szemléletből, bizonyítás nélkül elfogadta, holott ez a tény semmivel sem magátólértetődőbb, mint aminek bizonyítását a feladat kívánja.

2. Számos megoldás a fentinek nem lényegesen különböző változata. Így egyesek a B pont F-re vonatkozó B_1 tükörképét véve a BDE és ABB_1 háromszögek egybevágóságát igazolták, vagy meghúzva a BC-vel párhuzamos FG középvonalat, a BFG és DEB háromszögek hasonlóságát bizonyították fentiekkel rokon gondolatok alapján.

II. megoldás: A D és E pontok jelentése legyen ugyanaz, mint az előző megoldásban, és a BDE háromszög B-ből induló magasságvonala messe AC-t F-ben.



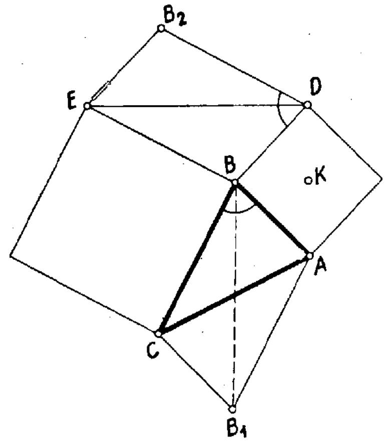
2. ábra

Forgassuk el az ABF és CBF háromszögeket B körül ellenkező irányban $90°$-kal úgy, hogy az A pont D-be, C pedig E-be kerüljön. A háromszögek új helyzete legyen DBF_1 és EBF_2.

Ekkor az elforgatás következtében a BF_1 és BF_2 szakaszok merőlegesek BF-re, s így egy egyenesbe esnek, amely párhuzamos ED-vel; másrészt DF_1 és EF_2 merőleges AC-re, tehát párhuzamos egymással.

Ezek szerint DEF_2F_1 paralelogramma. Ebből következik egyrészt, hogy DE egyenlő hosszú F_1F_2-vel, ami BF kétszerese; másrészt az AF-fel egyenlő hosszú DF_1 és a CF-fel egyenlő EF_2 egymással egyenlők, így tehát BF az ABC háromszög súlyvonala. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

III. megoldás: Jelölje D és E ugyanazokat a pontokat, mint az előző megoldásokban. Egészítsük ki az ABC és BDE háromszögeket az $ABCB_1$, ill. BDB_2E paralelogrammává.



3. ábra

Azt állítjuk, hogy ez a két paralelogramma egybevágó. Forgassuk ugyanis el az ábrát az AB fölötti négyzet K középpontja körül $90°$-kal úgy, hogy AB a BD oldalba menjen át. Ekkor az AB_1 oldal, amelyik párhuzamos és egyenlő BC-vel, az utóbbira merőleges BE négyzetoldalra kerül, tehát az $ABCB_1$ paralelogramma BDB_2E-t fogja fedni.

Az AC és DE oldalak ennek a paralelogrammának a két átlójával egyenlők s így a paralelogrammában felezik egymást. Ez azonban éppen azt jelenti, hogy a két háromszög bármelyikében a B-vel szemközti oldal a másik B-ből induló súlyvonalának a kétszerese és arra merőleges. Ezzel a feladat állítását (annál valamivel többet is) igazoltuk.

Megjegyzések: 1. Ebben a megoldásban világos az ABC és DBE háromszögek teljesen szimmetrikus szerepe, ami különben közvetlenül látszik abból, hogy az ábrán szereplő két négyzet keletkezhetett akár mint az egyik, akár mint a másik háromszög B-ből induló oldalaira kifelé rajzolt négyzet.

2. Ennek megfelelően az I. és II. megoldásban is felcserélhetnénk a két háromszög szerepét, ami annak felel meg, hogy ábráink alapján DE helyett AC-re is igazolhatnánk a feladatnak megfelelő állítást. Ez az I. megoldás esetén teljesen azonos módon történhetne, a II. megoldást annyiban kellene módosítani, hogy BF súlyvonal voltának bizonyítása helyett arra kellene hivatkoznunk, hogy a BDE háromszög B-ből kiinduló súlyvonala egyben a paralelogramma középvonala is, és így DF_1-gyel és EF_2-vel párhuzamos és egyenlő, a kettő együtt pedig kiadja AC-t.

3. A feladat állítása érvényben marad akkor is, ha nem kifelé, hanem „befelé” rajzolunk az ABC háromszög oldalai fölé négyzeteket. (A hatszög ebben az esetben hurkolt hatszög lesz.) Ez esetben a bizonyításainkban szereplő BDE háromszög helyébe mindössze annak a B pontra vonatkozó tükörképe lép.