I. megoldás: Ha a keresett szám utolsó jegye 2, akkor kétszerese csak 4-re végződhet. Ez lesz a keresett szám utolsó előtti jegye is. Ennek kétszerese 8, a szám kétszeresének lesz utolsó előtti jegye, így a keresett számnak végétől számított harmadik jegye is 8 kell hogy legyen. A szám kétszeresének végétől számított harmadik jegye 6, mivel 8 kétszerese 6-ra végződik. A keresett számnak tehát 6 lesz a végéről számítandó negyedik jegye. A számból így már megvan: $\dots 6842$. Ennek kétszeresét képezve a negyedik jegy egyúttal a keresett számból a 2 elhagyásával és elejére írásával keletkező számnak is hátulról számított negyedik jegye lesz. Ez a jegy 3, mivel a 6 kétszereséhez a $2\cdot 8$-nak 1-es maradékát is hozzá kell számítanunk. Így haladhatunk tovább a keresett szám számjegyeinek megállapításában.

A feladatnak megfelelő legkisebb számot akkor kapjuk meg, amikor a kétszeres számban először jutunk 2-höz. Ezen az úton a

$$105\ 263\ 157\ 894\ 736\ 842 = A$$

számhoz jutunk, amire ismét alkalmazva az eljárást $2A$ első jegyéül 2 adódik. Ezt tekinthetjük az utolsó jegy előreírásából keletkezőnek, s így A megoldása a feladatnak, mégpedig a legkisebb megoldása.

Folytathatjuk azonban tovább is az eljárást az 1 elé írva egy 2 számjegyet; ez esetben újra az A jegyei ismétlődnének s így kapjuk egy további megoldásként az $A\cdot 10^{18}+A$ számot, és hasonlóan ismételhetjük A jegyeit periodikusan akárhányszor, mindig megoldást kapunk. Az eljárás, amivel ezeket a megoldásokat nyertük, mutatja, hogy csak ezek a megoldások lehetségesek. A feladat összes megoldásai tehát az

$$A\cdot 10^{18k}+A\cdot 10^{18(k-1)}+\ldots+A\cdot 10^{18}+A = A\cdot\frac{10^{18(k+1)}-1}{10^{18}-1}$$
$$(k=0,1,2,\ldots)$$

számok.

Megjegyzések: 1. A számjegyei között már korábban is előfordult a 2 (A negyedik jegye), ott azonban nem állhattunk meg, mert a szám kétszerezésével akkor a 2 elé egy 1 kerül.

2. Kezdhettük volna a számjegyek megállapítását a szám elejéről is: kétszerezéssel a szám elejére 2 csak úgy kerülhet, ha első jegye 1, viszont 21 csak úgy, ha az után 05 következik stb.

3. Sok megoldó megelégedett A megadásával, és nem adta meg az összes megoldást.

II. megoldás: Nevezzük a 2 elhagyása után megmaradó számot x-nek, és legyen ez n-jegyű szám. Ekkora keresett szám így írható: $10x+2$. Ha a 2-t az x szám elé írjuk, akkor az így kapott szám $2\cdot 10^n+x$. A feltétel szerint tehát:

$$2(10x+2)=2\cdot 10^n+x,$$

amiből:

$$x=2\cdot\frac{10^n-2}{19}$$

és az eredeti szám:

$$10x+2=20\cdot\frac{10^n-2}{19}+2=\frac{20\cdot 10^n-2}{19}=10^n+\frac{10^n-2}{19}. \tag{1}$$

Ezek akkor egész számok, ha 10^n-2 osztható 19-cel, vagyis ha 10^n osztva 19-cel maradékul 2-t ad. Ez azt jelenti, hogy ha elkezdve tizedes törtté alakítani az $\frac{1}{19}$ számot, az osztási maradékok közt előfordul a 2, akkor van a feladat feltételeinek megfelelő szám, egyébként nincs, ilyen számot úgy kapunk, hogy vesszük a 2 maradék föllépéséig nyert hányadost, tizedesvessző kitétele nélkül és ha az n-edik 0 „levétele” után lépett fel a 2 maradék, akkor az így kapott egész számhoz 10^n-t adunk hozzá.

Az osztást elvégezve a 17-ik 0 levétele után lép fel először 2 maradékul és ekkor a hányados 5 263 157 894 736 842, tehát a keresett szám nyomán megfelel 105 263 157 894 736 842. Ha az osztásban nem állunk meg a „2” maradéknál, akkor a hányados következő jegyéül 1-et és maradékul is 1-et kapunk, tehát innen ismétlődnek az eddig nyert maradékok és a hányadosban az eddig nyert jegyek, leírva a következő 0 levételekor keletkező 0 jegyet is. Így bármeddig folytatva az osztást, az első „2”-től kezdve minden tizennyolcadik lépés újra „2” maradékhoz vezet. Ezek bármelyikénél megállhatunk.

Ezen az úton megkapjuk az előző megoldásban nyert összes számokat, amelyek megfelelnek a feladat követelményeinek.

Megjegyzés: Az $\frac{1}{19}$ tizedes törtté alakításának megfelelő osztás közben 1-től 18-ig minden szám előfordul maradékként, így a 19 tehát ún. főnix nevező[1]. Az azonban, hogy a feladat megoldható – azaz, hogy előfordult a maradékok között a 2, – ez nem azon múlik, hogy minden lehetséges maradék tényleg fellépett. Ha pl. azt követelnénk, hogy a szám az utolsó jegy előrehelyezésével 5-szörösére vagy 7-szeresére változzék, ebből arra a követelményre jutnánk, hogy az $\frac{1}{49}$ osztás közben az 5, ill. az $\frac{1}{69}$ osztás közben a 7 maradék fellépjen és mindkettő be is következik, bár sem a 49, sem a 69 nem főnix nevező (összetett szám nem is lehet az).

[1] Az ilyen számokról bővebb felvilágosítást ad pl. a következő mű: Péter Rózsa: A számok világa. (Budapest, 1948. Új Nevelés Könyvtára, 144. o.)