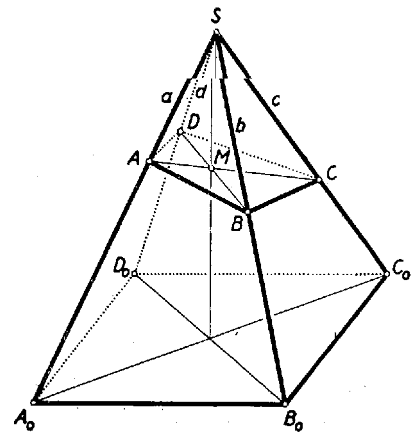
Sok versenyző használt trigonometriát a feladat megoldásában. Bemutatunk egy ilyen megoldást.

I. megoldás. Kiszámítjuk az $SABCD$ gúla térfogatát egyrészt mint az $SABC$ és $SACD$, másrészt mint az $SABD$ és $SBCD$ tetraéderek térfogatának összegét (1. ábra).



1. ábra

Az $SA_0B_0C_0D_0$ gúla S-ből húzott testmagassága egyenlő α szögeket zár be a gúla oldaléleivel, és benne van két–két szemközti oldalél síkjában. Mivel az alaplap négyzet, a kérdéses testmagasság egyben merőleges vetülete is két szemközti oldalél síkjában a másik két oldalélnek. Így egy–egy ilyen síkkal a másik két oldalél α nagyságú szöget zár be.

Jelöljük az SA, SB, SC, SD élhosszúságokat a, b, c, d-vel.

Az $SABC$ tetraéder alaplapjának az SAC háromszöget választva, ennek S-nél levő szöge 2α, így az SA-ra C-ből bocsátott magasság hossza $SC\sin 2\alpha = c\sin 2\alpha$, az alaplap területe tehát $\frac{1}{2}ac\sin 2\alpha$. A B csúcsból az alapra bocsátott magasság hossza viszont $b\sin\alpha$. Így a tetraéder térfogatát V_4-gyel jelölve

$$V_4 = \frac{1}{6}a\,b\,c\,\sin 2\alpha\sin\alpha.$$

Az első bekezdésben szereplő másik három tetraéder V_2, V_3, V_1 térfogatára $V_2 = \frac{1}{6}acd\sin 2\alpha\sin\alpha$, $V_3 = \frac{1}{6}abd\sin 2\alpha\sin\alpha$, $V_1 = \frac{1}{6}bcd\sin 2\alpha\sin\alpha$. A $V_1 + V_3 = V_3 + V_4$ egyenletet $\frac{1}{6}abcd\sin 2\alpha\sin\alpha$ értékkel osztva, a bizonyítandó

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

egyenletet kapjuk.

Megjegyzés: Ha a gúla alapja nem négyzet, hanem téglalap, akkor a fenti meggondolásban, csak annyi változik, hogy egy oldalél a két vele szomszédos oldalél síkjával, valamilyen α-tól különböző β szöget zár be, de ez az érték mind a négy oldalélre ugyanaz. Így a fentiekben a térfogatokban szereplő utolsó tényező $\sin\alpha$ helyett $\sin\beta$ lesz, ami a végkövetkeztetésen nem változtat. *A feladat állítása* tehát *téglalap alapú egyenlő oldalélű gúlára is érvényes.*

II. megoldás. A négyszögmetszet AC átlója benne van az SAC síkban, BD átlója pedig az SBD síkban, ezen átlók M metszéspontja tehát a két sík metszésvonalán van, az pedig az $SA_0B_0C_0D_0$ gúla S-ből induló testmagasságának egyenese, amely az oldalélekkel egyenlő α szögeket zár be (1. ábra). Így SM közös szögfelezője az ASC és BSD háromszögeknek, amelyeknek S-nél levő szöge egyaránt 2α.

Ha e két háromszöget SM körül egymásra forgatva képzeljük (ez az egymásra forgatás akkor is elvégezhető, ha az $A_0B_0C_0D_0$ alaplap téglalap), a feladat állítása a következő síkbeli állítássá fogalmazható át: *Ha egy szög felező egyenesének egy pontján át húzott két szelő a szög száraiból a csúcstól számítva* a *és* c, *illetőleg* b *és* d *hosszúságú szakaszokat metsz le, akkor*

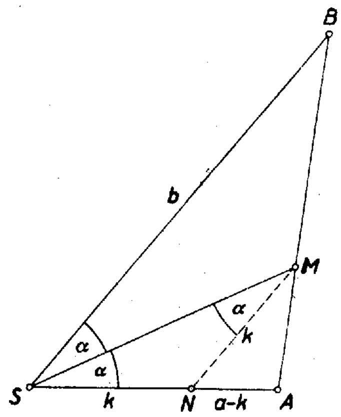
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

Ez még úgy is fogalmazható, hogy a szárakból lemetszett szakaszok reciprok értékeinek összege független a szelő irányától. Erre az állításra számos egyszerű, trigonometriát nem használó, megoldás adható.)[1]

Legyen ASB a kérdéses szög, a szögfelező messe az AB szakaszt M-ben (2. ábra).

[1]A feladat az előbbi szövegezésben szerepelt 407. feladatként. Két megoldás található a IV. kötet 4–5. (1952. májusi) számában a 134–135. oldalon.

A második formában a feladat lényegében benne foglaltatik a 706. feladatban, amelynek megoldását lásd a XII. kötet 4. (1956. április) számában a 110–112. oldalon.



2. ábra

Húzzunk M-en át párhuzamost BS-sel. Messe ez az SA-t N pontban. Az SNM háromszög S-nél és M-nél fekvő szöge egyaránt α, így a háromszög egyenlőszárú. Az egyenlő SN és MN távolságokat jelöljük k-val. Ekkor $AN = a - k$, és a hasonló ASB és ANM háromszögekből

$$\frac{a}{b} = \frac{a-k}{k} = \frac{a}{k} - 1.$$

Mindkét oldalhoz 1-et adva és a-val osztva

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}.$$

Mivel k hossza csak az SM hosszától és α nagyságától függ, az AB szelő irányától nem, így állításunkat bebizonyítottuk.

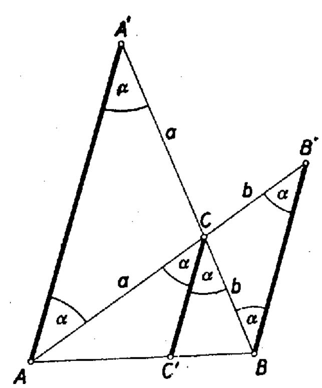
Megjegyzések: 1. Ha tetszés szerinti egyenlő oldalélű gúlát veszünk, akkor az alapsokszög körbeírható, a testmagasság talppontja e kör középpontja, és az oldalélek egyenlő α szöget zárnak be a testmagassággal. Ha még az alapsokszög szimmetrikus is a kör középpontjára, vagyis a szemközti csúcsokat összekötő átlók egy ponton, a kör középpontján mennek keresztül, akkor egy síkkal elmetszve ez összes oldaléleket, a keletkező sokszögmetszet szemközti csúcsait összekötő átlók is egy ponton mennek keresztül, és ez a pont a testmagasságon van. Így kiválasztva egy szemközti élpárt a rajtuk átfektetett síkban egy háromszög keletkezik, melyben a 2α szög felezőjének hossza a testmagasságnak a metsző síkig terjedő darabja, vagyis mindegyik háromszögben ugyanakkora. Így a bebizonyított tételt alkalmazhatjuk az összes szemközti élpárra és azt kapjuk:

Ha egy egyenlő oldalélű gúla alapja centrálisan szimmetrikus sokszög (és így szükségképpen páros oldalszámú), akkor egy minden oldalélt metsző síkot véve, a szemközti élpárokból lemetszett darabok reciprok értékeinek összege minden élpárra ugyanakkora.

2. A II. megoldásban bizonyított síkbeli tétel következik az 1905. évi Eötvös–verseny 3. feladatának)[2] állításából is, mely szerint egy ABC háromszög csúcsain át párhuzamosan elmetszve a szemközti oldaelegyeneseket, egy–egy A', B', C' pontban, de úgy, hogy C' A és B közt legyen (3. ábra) fennáll az

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} = \frac{1}{CC'}$$

összefüggés.



3. ábra

[2]Kürschák J.: Matematikai Versenytételek I. rész. 2. kiadás. 77–78. old.

Ha itt CC' a C csúcsú 2α szög szögfelezője, akkor az ACA' és BCB' háromszögek C-vel szemközti oldalán fekvő szögei α-val egyenlők. Így a két háromszög egyenlő szárú és egymáshoz hasonló. Ezért $AC = CA' = a$, $BC = CB' = b$ és

$$\frac{a}{AA'} = \frac{b}{BB'} = r.$$

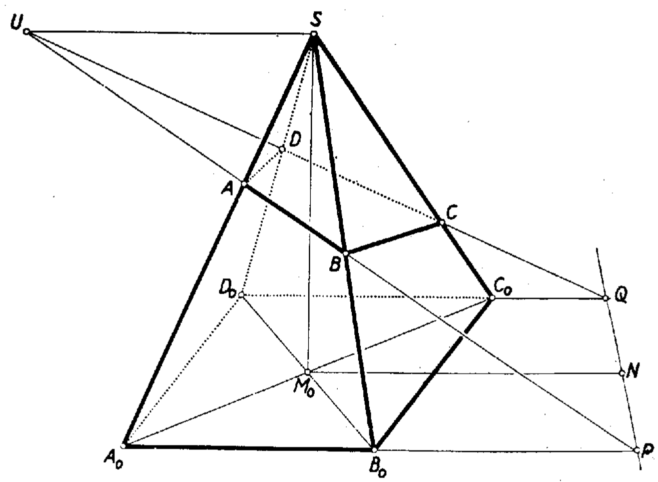
Innen AA'-t és BB'-t a fenti egyenletbe helyettesítve

$$\frac{r}{a} + \frac{r}{b} = \frac{1}{CC'}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r \cdot CC'}.$$

A jobb oldalon r csupán az α szög nagyságától függ, így mindazon háromszögekben, amelyek a 2α szögben és az ebből induló CC' szögfelező hosszában megegyeznek, a 2α szöget bezáró oldalak reciprok értékeinek összege egyenlő.

III. megoldás: A feladat állítását a testmagasság segítségül vétele nélkül is bebizonyíthatjuk.

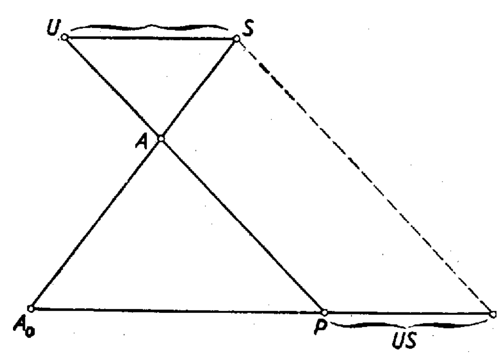
Ha a metsző sík párhuzamos az alappal, akkor az oldalélekből egyenlő szakaszokat metsz le, s így a feladat állítása magától értetődő. Ha ez nem áll, akkor messe egymást, pl. AB és CD egy U pontban (4. ábra).



4. ábra

US az A_0B_0S és C_0D_0S síkok metszésvonalán van, ez pedig párhuzamos a két síkban húzható, egymással párhuzamos egyenesekkel, így az A_0B_0 és a C_0D_0 egyenesekkel. Messe az AB az A_0B_0-t P-ben, CD pedig C_0D_0-t Q-ban. Az eredeti gúla oldaléleinek közös hosszát jelöljük e-vel. Ekkor az UP-vel elmetszett US, A_0P, és SA_0 egyenesekből álló alakzatból adódik, hogy (5. ábra)

$$\frac{e}{SA} = \frac{A_0P + US}{US}.$$



5. ábra

(Ez közvetlenül világossá válik, ha S-ből párhuzamost húzunk UP-vel.) Hasonlóan nyerjük, hogy

$$\frac{e}{SB} = \frac{B_0P + US}{US},$$

$$\frac{e}{SC} = \frac{C_0Q + US}{US}, \qquad \frac{e}{SD} = \frac{D_0Q + US}{US}$$

Innen

$$e\left(\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}\right)=\frac{A_0P+C_0Q+2US}{US},$$
$$e\left(\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}\right)=\frac{B_0P+D_0Q+2US}{US}.$$

A_0P és C_0Q az A_0PQC_0 trapéz párhuzamos oldalai, B_0P és D_0Q pedig a B_0PQD_0 trapéz párhuzamos oldalai, így összegük a megfelelő trapéz középvonalának kétszerese. A_0C_0 és B_0D_0 azonban egy parallelogramma átlói, s így M_0 metszéspontjuk mindkettőt felezi. Messe az M_0-ből A_0B_0-vel húzott párhuzamos PQ-t az N pontban, akkor tehát M_0N a két trapéz közös középvonala, és így

$$e\left(\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}\right)=\frac{2(M_0N+US)}{US}=e\left(\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}\right),$$

amiből a bizonyítandó állítás (e-vel osztva) már következik.

Megjegyzések: 1. A bizonyításban hallgatólag feltettük, hogy a PQ egyenes nem metszi a gúla alapsokszögét, tehát az A, B, C, D pontok egyike sem esik a megfelelő él meghosszabbítására. Ez azonban nem lényeges megszorítás, mert az alapsíkot önmagával párhuzamosan eltolhatjuk addig, míg az összes metszéspontok az alapnégyszögön kívül esnek. Ezzel a metszősík által az élekből lemetszett szakaszok nem változnak, és így a fenti fennálló összefüggések sem. (Egyébként a bizonyítás változtatás nélkül érvényes erre az esetre is, ha az US-sel párhuzamos szakaszokat pozitívnak vagy negatívnak tekintjük, amint irányuk a csúcsok felírt sorrendje szerint megegyezik vagy ellentétes US irányával.)

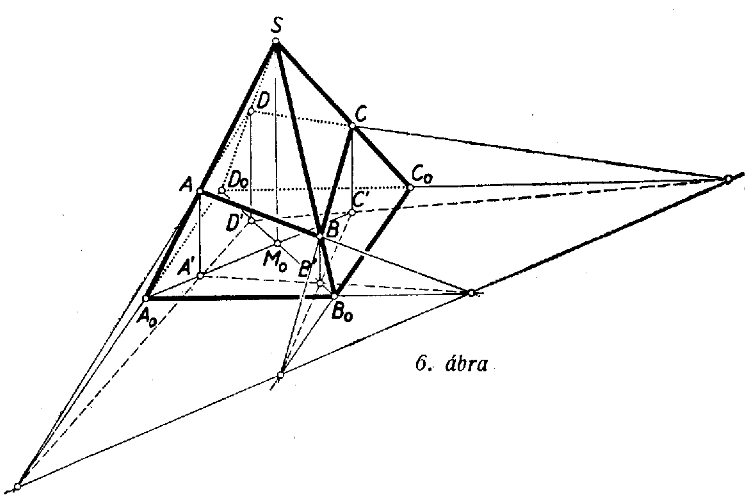
2. A bizonyításban csak egy helyen használtunk fel az alapról annál többet, hogy parallelogramma: mikor arra következtettünk, hogy a gúla oldalélei egyenlő hosszúságúak. Ha tetszés szerinti parallelogrammát megengedünk alapnak és a gúla csúcsa az átlók metszéspontjában az alapra emelt merőlegesen van, akkor is igaz annyi, hogy $SA_0=SC_0$ (jelöljük hosszukat e-vel) és $SB_0=SD_0\,(=f)$. Ebben az esetben tehát a fenti levezetés annyit ad, hogy

$$e\left(\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}\right)=f\left(\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}\right),$$

vagyis *egy paralelogramma alapú gúlát, amelynek csúcsa az átlók metszéspontjában emelt merőlegesen van, egy síkkal elmetszve, a szemközti élekből lemetszett szakaszok reciprok értékének összege fordított arányban áll egymással, mint a megfelelő élpárok hossza:*

$$\left(\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}\right):\left(\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}\right)=f:e$$

3. Legyenek az A, B, C, D pontok merőleges vetületei az alaplapon A', B', C', D'. Ezek rendre az $\mathrm{M_0A_0}$, $\mathrm{M_0B_0}$, $\mathrm{M_0C_0}$, $\mathrm{M_0D_0}$ félegyenesre esnek, ahol M_0 az alapnégyszög átlóinak metszéspontja (6. ábra).



6. ábra

Az A_0B_0, AB, $A'B'$ egy ponton mennek keresztül. Megkeresve a B_0C_0, C_0D_0 és D_0A_0-n a megfelelő metszéspontokat, ezek egy egyenesen, a metszősík és az alapsík metszésvonalán sorakoznak. Könnyen látható, hogy az M_0 pontból a vesszős pontokig terjedő szakaszok közt is fennáll egy olyan összefüggés, amilyen a feladatban szerepel. (Erre vonatkozólag az olvasó a jövő számunkban talál egy kitűzött feladatot.)