I. megoldás: Kifejezzük a második tagot is 2 alapú logaritmussal. A logaritmus definíciója szerint, ha $a \neq 1$,

$$a^{\overset{a}{\log} 16} = 16.$$

Ennek 2 alapú logaritmusát véve

$$\overset{a}{\log} 16 \cdot \overset{2}{\log} a = 4, \quad \text{vagyis} \quad \overset{a}{\log} 16 = \frac{4}{\overset{2}{\log} a}.$$

Így az egyenlőtlenség bal és jobb oldalának, különbsége

$$\frac{1}{\overset{2}{\log} a} + \frac{\overset{2}{\log} a}{4} - 1 = \frac{4 + \left(\overset{2}{\log} a\right)^2 - 4\overset{2}{\log} a}{4\overset{2}{\log} a} = \frac{\left(\overset{2}{\log} a - 2\right)^2}{4\overset{2}{\log} a}$$

Ez nem negatív, ha $\overset{2}{\log} a$ pozitív, azaz, ha $a > 1$, és ezt kellett bizonyítani.

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\overset{2}{\log} a = 2$, azaz $a = 4$.

II. megoldás: Vizsgáljuk valamivel általánosabban az

$$\frac{1}{\overset{b}{\log} a} + \frac{1}{\overset{a}{\log} c}$$

összeget, ahol vagy $a, b, c > 1$ vagy $0 < a, b, c < 1$ áll fenn. Jelöljük a két nevezőt u-val és v-vel, akkor a feltevés szerint u és v pozitív, s így a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \geq 2\sqrt{\frac{1}{uv}}.$$

Mivel a logaritmus értelmezése szerint

$$b^u = a, \quad a^v = c, \qquad \text{ezért} \qquad b^{uv} = (b^u)^v = a^v = c.$$

Innen

$$uv = \overset{b}{\log} c,$$

tehát azt nyertük, hogy a mondott feltételek esetén

$$\frac{1}{\overset{b}{\log} a} + \frac{1}{\overset{a}{\log} c} \geq \frac{2}{\sqrt{\overset{b}{\log} c}}.$$

Ez $b = 2$, $c = 16$ esetén a bizonyítandó egyenlőtlenséget adja.