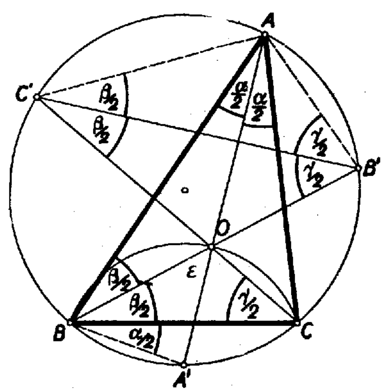
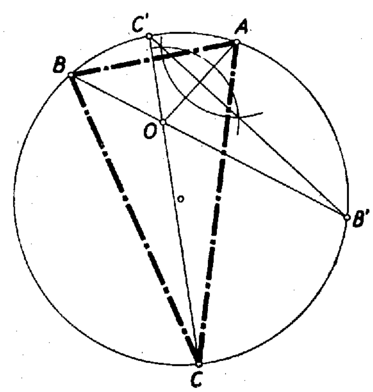
I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak, a betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

A BO és CO szögfelezők messék a kört másodszor a B', ill. C' pontokban. A kerületi szögek tétele szerint $AB' = B'C$, és $AC' = C'B$, és így ugyancsak a kerületi szögek tételének értelmében az $OB'AC'$ négyszögben a $B'C'$ átló felezi a B' és C' csúcspontoknál fekvő szögeket, vagyis a $B'C'$ átló a négyszög szimmetria tengelye. Ebből következik, hogy a négyszög deltoid, és $B'C'$ merőlegesen felezi az AO átlót.

Eszerint az igen egyszerű szerkesztés menete Az AO szakaszt merőlegesen felező egyenes metszi ki a körből a B' és C' pontokat (2. ábra).



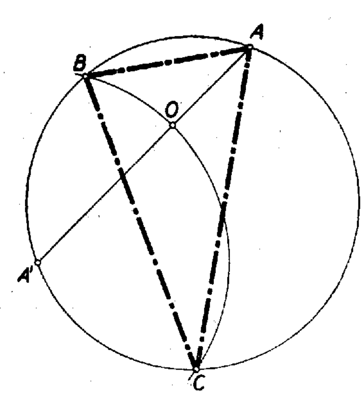
2. ábra

A $B'O$ és $C'O$ egyeneseknek második metszéspontja a körrel szolgáltatja a keresett B, ill. C pontokat.

II. megoldás: Még egyszerűbb szerkesztéshez jutunk a következőképpen: Legyen az AO egyenes második metszéspontja a körrel A'. Az $A'BO_{\triangle}$-ben a O csúcsnál fekvő ϵ szög az $AOB_{\triangle}$ külső szöge (1. ábra). Tehát $\epsilon = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Az $A'BC\sphericalangle$ mint kerületi szög $\frac{\alpha}{2}$, és így az $A'BO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \epsilon$. Tehát az $A'BO_{\triangle}$-ben e két egyenlő szöggel szemben fekvő két oldal is egyenlő, vagyis

$$A'B = A'O, \qquad \text{hasonlóan} \qquad A'C = A'O.$$

Eszerint az A' körül $A'O$ sugárral rajzolt kör metszi ki az adott, körből a keresett B és C pontokat (3. ábra).



3. ábra

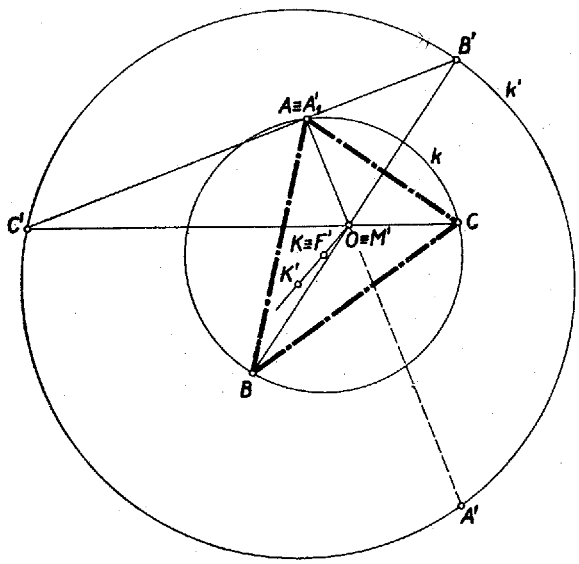
Megjegyzés: Az itt bizonyított tételt (mely szerint a háromszög köré írt kör két csúcspont közti ívének felezőpontja éppolyan távol van a két csúcsponttól, mint a háromszögbe írt kör középpontjától) lényegében tartalmazta az 1954. évi Arany Dániel versenyen kezdők részére kitűzött 1. feladat (lásd a K. M. L. IX. kötet, 2. sz. 1954. okt., 33. o.), de megtalálható a tétel a Matematikai Versenytételek I. részében is az 1897/2. feladathoz fűzött 2. jegyzetében (42. o.). Néhány versenyző hivatkozott is e forrásokra, de a megoldók zöme bizonyította e tételt.

A bizonyítás tulajdonképpen már az I. megoldásban megtörtént, amikor megmutattuk, hogy az $OB'AC'$ négyszög (1. ábra) deltoid, vagyis $B'A = B'O$, és $C'A = C'O$.

III. megoldás: Igen szép, szellemes megoldáshoz jutunk (bár nem a legegyszerűbbhöz), ha az előzőknél valamivel többet (Feuerbach-féle kör) használunk fel.

Tekintsük a keresett $ABC_\triangle$-et valamely $A'B'C'_\triangle$ talpponti háromszögének, akkor az adott K középpontú és r sugarú k kör az $A'B'C'_\triangle$ Feuerbach-féle köre ($K \equiv F'$). Ismeretes, hogy az $A'B'C'_\triangle$ magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői, tehát az adott O pont azonos az $A'B'C'$ háromszög M' magasságpontjával, A pedig az A'-ból kiinduló magasságvonal A'_1 talppontja. Ismeretes továbbá, hogy az $A'B'C'_\triangle$ k' körülírt köre nem egyéb, mint a k Feuerbach-féle körnek $1:2$ arányú kivetítése az $M'(\equiv O)$ centrumból.

Eszerint a szerkesztés menete: Az $O(\equiv M')$ pont tükörképe a $K(\equiv F')$ pontra nézve lesz az $A'B'C'_\triangle$ köré írt k' körnek K' középpontja (4. ábra).



4. ábra

K' körül $2\ r$ sugárral rajzolt kör a k' kör. Az $A(\equiv A'_1)$ pontban $OA(\equiv M'A'_1)$-ra emelt merőleges egyenes metszi ki a k'-ből a B' és C' pontokat. A $B'O(\equiv B'M')$ és $C'O(\equiv C'M')$ egyeneseknek a k körrel való, $O(\equiv M')$ ponton túl fekvő metszéspontjai a keresett B és C pontok.

IV. megoldás: Könnyen nyerhető egy szerkesztés, de távolról sem egyszerű szerkesztés, Euler egy tételén keresztül, melyet a versenyzők nagy része ismert és felhasznált, pl. a következő módon:

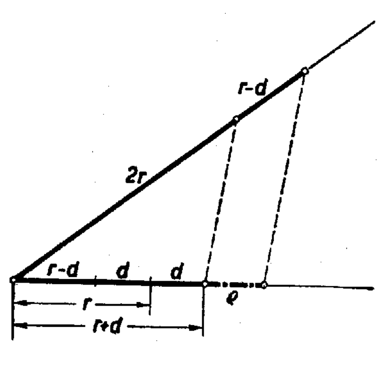
Ha az adott kör középpontja K, sugara r, a keresett ABC háromszögbe írt kör sugara ϱ, és $OK = d$, akkor Euler tétele szerint (lásd pl. Matematikai Versenytételek I. rész, 41. o.)

$$2r\varrho = r^2 - d^2 = (r+d)(r-d)$$

ahonnan

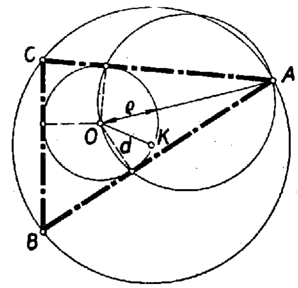
$$2r : (r+d) = (r-d) : \varrho,$$

és így ϱ az adatokból negyedik arányosként könnyen megszerkeszthető (5. ábra).



5. ábra

Az A pontból az O körül ϱ sugárral rajzolt körhöz szerkesztett érintők metszik ki az adott körből a keresett B és C pontokat (6. ábra).



6. ábra

Az idézett helyen megtaláljuk annak bizonyítását is, hogy az Euler-összefüggés teljesülése esetén a kerület bármely A pontjából indulva ki a BC egyenes is érinti az O középpontú ϱ sugarú kört, tehát az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek.

Mindig van egy és csakis egy megoldás, mert $2r > r + d$ miatt $r - d > \varrho$, és így a ϱ sugarú kör mindig az r sugarú kör belsejében van.[1]

Megjegyzés: E tétel különben, mint láthattuk (gyakorlati szempontból tekintve) elég körülményes szerkesztéshez vezet, még akkor is, ha negyedik arányosként szerkesztjük meg közvetlenül a ϱ-t. A megoldók legnagyobb része azonban ügyetlenebbül a $d^2 = r(r - 2\varrho)$ alakból, az adott d és r szakaszokból, a derékszögű háromszöggel kapcsolatos mértani középarányosság felhasználásával szerkesztette meg az $r - 2\varrho$ szakaszt, amelyből $\dfrac{r-(r-2\varrho)}{2}$-ként kapta meg a ϱ-t.

[1] *Szerkesztő megjegyzése:* Számos versenyző – főleg lapunk olvasói – használta fel e tételt, amelyre lapunk a közelmúltban kétszer is (XIII. kötet 3. sz. 1956. november, 96. o., és XIII, kötet 5. sz. 1956. december 143. o.) hivatkozott. Kitűnik ebből, hogy a középiskolai matematikai irodalom ismerete kétségkívül előnyt jelent a versenyzőknek, amint erre lapunk állandóan rámutatott.

Jelen esetben azonban sem az Euler-tételre, sem a Feuerbach-féle körre nem volt szükség, hanem az I. gimnáziumban tanult egyszerű szögösszefüggések vezettek el a legegyszerűbb, legelegánsabb szerkesztéshez, amint azt az I. és II. megoldásban láttuk.