I. megoldás: A bizonyítandó állítás írható az

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geq 0 \tag{1}$$

alakban.

A baloldalt közös nevezőre hozva, majd a számlálót ismételten tényezőkre bontva nyerjük, hogy

$$\frac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)}{a^2b^2}=$$
$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2-ab)}{a^2b^2},$$

vagyis egyenlőtlenségünk így is írható

$$\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}\geq 0. \tag{2}$$

Mivel az $a=0$, $b=0$ értékek ki vannak zárva (mert különben az adott egyenlőtlenség értelmetlen volna), a^2b^2 mindig pozitív, $(a-b)^2$ nem lehet negatív, $(a+b)$ pedig a feltétel szerint pozitív, és így az (1)-gyel egyenértékű (2) helyessége nyilvánvaló. Az egyenlőség jele csak akkor érvényes, ha $a=b$.

Megjegyzés. Lényegében ugyanezeken az átalakításokon keresztül jutunk célhoz akkor is, ha bizonyítandó egyenlőtlenséget összevonás után a feltétel szerint pozitív $\dfrac{a^2b^2}{a+b}$ értékkel szorozzuk, és azután redukáljuk 0-ra, vagy ha a két oldal különbségét úgy képezzük, hogy a két oldal megfelelő tagjainak különbségét képezzük először, amikor is egyszerű módon adódik a tényezőkre bontás. Lényegében ehhez az eljáráshoz csatlakozik a következő megoldás.

II. megoldás: Egyenlőtlenségünk

$$pu+\frac{1}{p}v\geq u+v$$

alakban írható, ahol a $p=\dfrac{a^2}{b^2}$, $u=\dfrac{1}{a}$, $v=\dfrac{1}{b}$. Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetekben áll fenn ez az egyenlőtlenség, ha $p\geq 1$, és $u>0$. A két oldal különbsége (mely tehát nem lehet negatív):

$$pu+\frac{1}{p}v-u-v=(p-1)u+\left(\frac{1}{p}-1\right)v=(p-1)\left(u-\frac{v}{P}\right).$$

Ez 0, ha $p=1$. Ellenkező esetben az első tényező feltétel szerint pozitív, tehát a második sem lehet negatív:

$$u\geq\frac{v}{p}\quad\text{azaz, mivel}\quad u>0,\quad p>0,\quad p\geq\frac{v}{u}.$$

Az egyenlőtlenség tehát helyes, ha p sem 1-nél, sem $\dfrac{v}{u}$-nál nem kisebb. A versenyfeladat esetében feltehetjük, hogy $a\geq b$, a feladat feltétele szerint pedig $a>-b$. A kettőből ekkor

$$a\geq|b|,\qquad\frac{a}{|b|}\geq 1,\qquad\frac{a^2}{b^2}\geq 1.$$

Így $p=\dfrac{a^2}{b^2}$, $u=\dfrac{1}{a}$, $v=\dfrac{1}{b}$ választás mellett

$$p\geq 1,\quad\text{másrészt}\quad p=\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{|b|}\cdot\frac{a}{|b|}\geq\frac{a}{|b|}\geq\frac{a}{|b|}\geq\frac{a}{b}=\frac{v}{u}$$

végül az $a|\geq|b|\geq 0$ (és nyilván $a\neq 0$) folytán $u=\dfrac{1}{a}>0$. Így alkalmazható eredményünk, és a bizonyítandó egyenlőtlenség, helyességét adja. Ezzel állításunkat egy valamivel általánosabb egyenlőtlenség következményeként kaptuk.

Megjegyzés. Számos megoldás nem volt teljes értékű, mert szerzője, szorozva vagy osztva $(a+b)$-vel, nem hangsúlyozta, hogy $a+b>0$. Természetesen kimondottan hiba, ha a versenyző kiemelte, hogy $a+b\neq 0.$, mert ezzel elárulta, hogy nincs tisztában azzal, hogy egyenlőtlenségek szorzásánál (osztásánál) lényeges a szorzó (ill. osztó) előjele.

Sajnos, még gyakoribb volt az a megsemmisítő hiba, hogy versenyző ab-vel mint pozitív számmal szorzott vagy osztott, holott ab előjeléről nem tudunk semmit.