A feladat megoldására a versenyzők többsége felhasználta a háromszög alkotórészei közti legkülönfélébb összefüggéseket és sokan hosszabb számítások után jutottak csak el a feladat igazolásához.

Ezen megoldási módok közül talán a legegyszerűbb a sinus és cosinus-tétel felhasználásával az oldalakat közvetlenül bevonni a számításunkba.

I. megoldás: Mivel

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1,$$

azért

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 3.$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} \geq 4. \tag{1}$$

Szorozzuk meg (1)-et $\sin^2\gamma$-val

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} + 1 \geq 4\sin^2\gamma = 4(1-\cos^2\gamma) = 4 - 4\cos^2\gamma.$$

A sinus-tétel, ill. cosinus-tétel alapján ez az egyenlőtlenség így is írható

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + 1 \geq 4 - 4\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 = 4 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{a^2b^2}.$$

Mindkét oldalt a^2b^2-tel szorozva

$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \geq 4a^2b^2 - (a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2),$$

azaz rendezve

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2. \tag{2}$$

Mindkét oldalt 2-vel szorozva, és 0-ra redukálva

$$2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 \geq 0,$$

ami így is írható

$$(a^2-b^2)^2 + (a^2-c^2)^2 + (b^2-c^2)^2 \geq 0. \tag{3}$$

Ez azonban nyilvánvaló, mert valós számok négyzete nem lehet negatív. Egyenlőség jele csak $a=b=c$ esetén érvényes.

Mivel csupa egyenértékű átalakítást végeztünk, azért (3)-ból kiindulva visszafelé következtetve (1)-hez jutunk. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés: Sok versenyző jutott el (2)-höz, de a befejező lépést nem találta meg.

II. megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség baloldalát alakítsuk át a következőképpen

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = \frac{1}{2}\big[(\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta) + (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma) + \\
&+ (\operatorname{ctg}^2\gamma + \operatorname{ctg}^2\alpha)\big] = \\
&= \frac{1}{2}\big[(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)^2 + (\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma)^2 + (\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\alpha)^2\big] + \\
&+ \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha.
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, kapjuk, hogy

$$\operatorname{ctg}\gamma = -\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

és ebből $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$-val szorozva és átrendezve

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\alpha = 1. \tag{4}$$

Ezt a fent nyert azonosságba helyettesítve

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = 1 + \frac{1}{2}\left[(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)^2 + (\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma)^2 + (\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\alpha)^2\right] \geq 1.$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a három cotangens érték egyenlő, ami egy háromszög szögeire csak úgy következhetik be, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

A cotangensek négyzetösszege a minimális 1 értéket tehát egyedül a szabályos háromszögre veszi fel.

Megjegyzés: Felhasználhatjuk közvetlenül a számtani és mértani közép közötti – a tananyagból ismert – egyenlőtlenséget:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta}{2} + \frac{\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma}{2} +$$
$$+ \frac{\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\alpha}{2} \geq \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha.$$

Most már csak (4)-et kell bizonyítanunk. (A II. megoldás második átalakítása ennek a bizonyítását tartalmazza.)