

I. megoldás: A megoldásnak egy természetesen kínálkozó (ha nem is legegyszerűbb) módja, hogy megoldjuk a feltételi egyenletrendszert és a nyert gyökök értékeit behelyettesítjük a bizonyítandó egyenlőségekbe.

A feltételi egyenleteket rendre a , b , c -vel szorozva

$$\begin{aligned} (1) \quad & a^2 = abz + acy; \\ (2) \quad & b^2 = bcx + abz; \\ (3) \quad & c^2 = acy + bcx. \end{aligned}$$

(2)-ből abz értékét, (3)-ból acy értékét (1)-be helyettesítve

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcx.$$

Innen, ha $b \neq 0$, $c \neq 0$, akkor

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

tehát

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \\ &= \frac{4b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2)}{4b^2c^2} = \\ &= \frac{2(a^2b^2 + a^2b^2c^2 + c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{4b^2c^2} \end{aligned}$$

és így, ha $x \neq \pm 1$

$$\frac{a^2}{1 - x^2} = \frac{4a^2b^2c^2}{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Ebben az alakban nyilvánvaló, hogy a , b , c és x , y , z egyidejű ciklikus felcserélésével a baloldal átmegy $\frac{b^2}{1 - y^2}$, illetőleg $\frac{c^2}{1 - z^2}$ -be, míg a jobboldal önmagába megy át. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk, arra az esetre, ha $x \neq \pm 1$, $y \neq \pm 1$ és $z \neq \pm 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Vizsgáljuk meg, mi a helyzet a kizárt esetekben.

1. Ha $b = c = 0$, akkor az első egyenletből $a = 0$. Ez az eset figyelmen kívül hagyható.

Ha pl. $c = 0$, $b \neq 0$, akkor az első két egyenletből

$$z = \frac{a}{b} = \frac{b}{a}.$$

Innen $z = \pm 1$ és a harmadik egyenletből

$$y = \pm \frac{a}{b}x = \mp x$$

(vagy mindkét helyen a felső, vagy mindkét helyen az alsó előjel veendő) x tetszőleges lehet. Ez esetben tehát a következményben szereplő első két tört egyenlő, a harmadik értelmetlen.

2. Ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, de pl. $x = \pm 1$, akkor kell, hogy az $1 - x^2$ -re kapott tört kifejezés számlálója 0 legyen. Mivel pedig az az a , b , c fölcserélésével nem változik, így egyszersmind $1 - y^2 = 1 - z^2 = 0$ adódik, tehát a feladat következményében szereplő mindhárom tört értelmetlen.

II. megoldás: Kiküszöbölve z -t (1)-ből és (2)-ből, nyerjük, hogy

$$c(ay - bx) = a^2 - b^2.$$

Ebbe c értékét 3-ból behelyettesítve

$$a^2 - b^2 = (ay + bx)(ay - bx)a^2y^2 - b^2x^2.$$

Ez így is írható

$$a^2(1 - y^2) = b^2(1 - x^2),$$

ami egyenértékű a bizonyítandó első egyenlőséggel. Hasonlóan kapjuk a második egyenlőséget.

Megjegyzés: Az I. megoldásban felismerjük, hogy amennyiben a , b , c valamely háromszög oldalainak mértékszámai, akkor x éppen $\cos \alpha$.

A feltételi egyenletek ez esetben a következőkbe mennek át:

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta, \quad b = c \cos \alpha + a \cos \gamma, \quad c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

Ez az oldalak előállítására a másik két oldal vetületeként. A bizonyítandó állításban pedig a sinus-tételt ismerhetjük fel.

Ez a trigonometriai összefüggés csak speciális esete a feladat állításának, mert a bizonyított tételünk akkor is érvényes, ha a , b , c tetszőleges számok.

E trigonometriai összefüggésre több versenyző rámutatott. Volt olyan is, aki – mint láttuk, tévesen – a trigonometriai összefüggést a feladat állításával egyenértékűnek vette, és ennek alapján vélte a kívánt bizonyítást szolgáltatni.