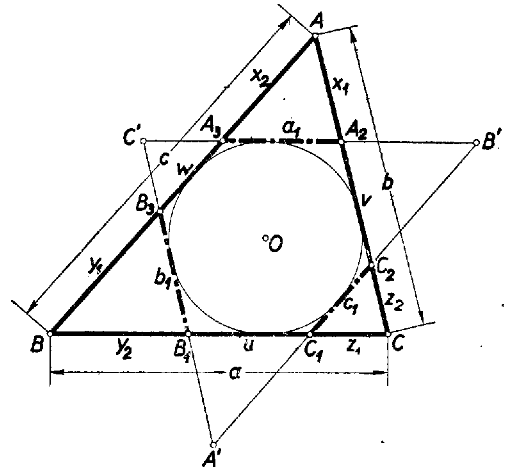
I. megoldás: Az a_1, b_1, c_1 szakaszok által az adott $ABC\triangle$-ből lemetszett háromszögek nyilvánvalóan hasonlóak az $ABC\triangle$-höz. A jelölést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ennek alapján

$$x_1 : b = a_1 : a$$

amiből

$$x_1 = \frac{a_1}{a} b.$$

Hasonlóképpen

$$x_2 = \frac{a_1}{a} c, \quad y_1 = \frac{b_1}{b} c, \quad y_2 = \frac{b_1}{b} a, \quad z_1 = \frac{c_1}{c} a, \quad z_2 = \frac{c_1}{c} b.$$

Az $ABC\triangle$ kerülete:

$$(u+v+w)+(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=k.$$

Az érintő hatszög tétele szerint

$$u+v+w=a_1+b_1+c_1,$$

és így

$$\begin{aligned}
&(a_1+b_1+c_1)+\frac{a_1}{a}(b+c)+\frac{b_1}{b}(a+c)+\frac{c_1}{c}(a+b)=\\
&=a_1+b_1+c_1+\frac{a_1}{a}(k-a)+\frac{b_1}{b}(k-b)+\frac{c_1}{c}(k-c)=\\
&=a_1+b_1+c_1+\frac{a_1}{a}k+\frac{b_1}{b}k+\frac{c_1}{c}k-a_1-b_1-c_1=\\
&=k\left(\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}\right)=k.
\end{aligned}$$

Mindkét oldalt k-val osztva a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

II. megoldás: Az előző megoldásban szereplő

$$y_2 = \frac{b_1}{b} a, \qquad z_1 = \frac{c_1}{c} a$$

összefüggéseket fogjuk felhasználni, emellett megmutatjuk, hogy

$$a_1 = u.$$

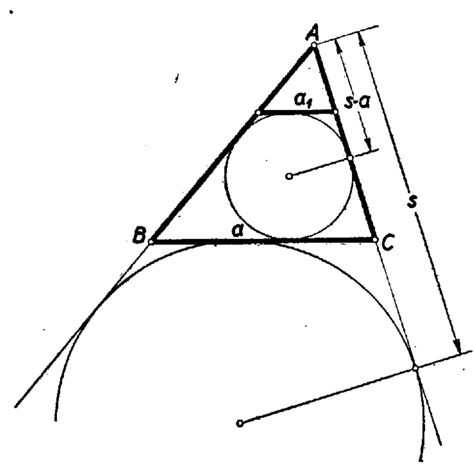
Ebből már következik az állítás, ha az

$$a = y_2 + u + z_1 = \frac{b_1}{b} a + a_1 + \frac{c_1}{c} a$$

összefüggést a-val osztjuk.

A bizonyítandó egyenlőség igazolására hosszabbítsuk meg az a_1, b_1, c_1 egyeneseket, míg metszik egymást. A keletkező $A'B'C'\triangle$ oldalai párhuzamosak az $ABC\triangle$ megfelelő oldalaival, és beírt körük közös. Így a kiegészített ábra centrálszimmetrikus a beírt kör O középpontjára nézve. Tehát az u és a_1 szakaszok is egymás tükörképei O-ra nézve, amivel állításunkat igazoltuk.

III. megoldás: Egészítsük ki az ábrát az AB oldalt és a másik két oldal meghosszabbítását érintő körrel (2. ábra).



2. ábra

A háromszög kerületét $2s$-sel jelölve tudjuk, hogy a C csúcsból a két körhöz húzott érintő szakaszok hossza $s-a$ és s. A beírt kör a C csúcsnál az a_1 szakasszal levágott kis háromszögnek hozzáírt köre. Így e kis háromszögből és körből álló ábrarész hasonló az ABC háromszögből és hozzáírt köréből álló ábrarészhez. A kettőben egymásnak megfelelő szakaszok aránya tehát egyenlő. Így

$$\frac{a_1}{a}=\frac{s-a}{s}.$$

Hasonlóan

$$\frac{b_1}{b}=\frac{s-b}{s},\qquad \frac{c_1}{c}=\frac{s-c}{s}.$$

Ezeket összeadva

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=\frac{3s-(a+b+c)}{s}=\frac{3s-2s}{s}=1.$$

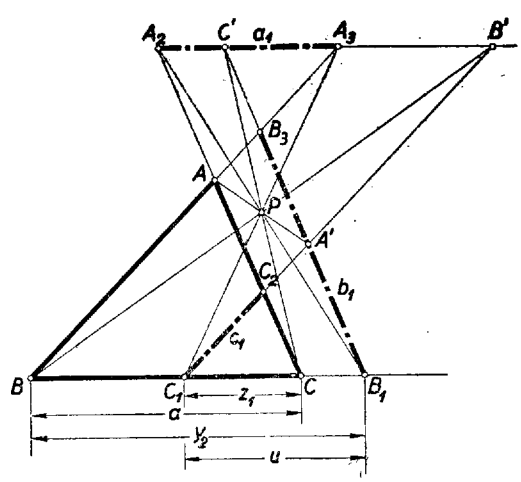
Megjegyzések: 1. Néhány versenyző rámutatott, hogy tételünk a hozzáírt kör esetén is érvényes, ha a keletkező szakaszokat előjellel vesszük. Egy még messzebb menő általánosítást adott *Udvari András.* Megfogalmazásához először is tekintsünk két párhuzamos szakaszt egyező vagy ellenkező előjelűnek aszerint, amint a két szakasz kezdőpontjától a végpont felé mutató irány megegyezik, vagy ellentétes.

Legyen egy ABC háromszögnek valamely, a síkjában fekvő, P pontjára vonatkozó tükörképe $A'B'C'\triangle$ és jelölje $A'B'$ metszéspontját BC-vel és CA-val C_1, illetőleg C_2-vel, $B'C'$ metszéspontját CA-val és AB-vel A_2 ill. A_3, végül $C'A'$ metszéspontját BA ill. BC-vel B_3, ill. B_1-gyel, ekkor

$$\frac{A_2A_3}{CB}+\frac{B_3B_1}{AC}+\frac{C_1C_2}{BA}=1. \tag{1}$$

Az 1. ábrában a P szerepét O tölti be; ez esetben mind a három arányszám pozitív és az (1) helyességét az I., II., III. megoldásokban bebizonyítottuk.

Az általános esetet a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Mivel a pontra való tükrözés egy szakaszt ugyanakkora, de ellenkező előjelű szakaszba visz át:

$$\frac{A_2A_3}{CB} = -\frac{A_2A_3}{BC} = \frac{B_1C_1}{BC},$$
$$\frac{B_3B_1}{AC} = \frac{BB_1}{BC},$$
$$\frac{C_1C_2}{BA} = \frac{C_1C}{BC}.$$

E három egyenlőség összeadásából adódik

$$\frac{A_2A_3}{CB} + \frac{B_3B_1}{AC} + \frac{C_1C_2}{BA} = \frac{B_1C_1 + BB_1 + C_1C}{BC} = \frac{BB_1 + B_1C_1 + C_1C}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

2. Egy térbeli általánosításra mutatott rá *Zsombok Zoltán*. Lásd a 772. sz. feladatot a 29. oldalon.